23 Matrices et applications linéaires.

1 Définition.

Définition 1

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $(A_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}$ un élément de $\mathbb{R}^{nm}$.

Nous appellerons *matrice* à n *lignes* et m *colonnes* le tableau de nombres réels suivant

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1m}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2m}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nm}\end{pmatrix}.$$

A_{23} est le *coefficient* (ou le terme) de A d'indice (i,j).
L'ensemble des matrices à coefficients réels de n lignes et m colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
Si $n=m$ alors nous dirons que la matrice est *carrée* de taille n. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1. C

Déterminez les transposées des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&4\\2&7\end{pmatrix}.$$

2 Application associée.

Définition 2

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $A = (A_{ij})$ une matrice prise dans $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

. $\vec{x} = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ un vecteur colonne élément de $\mathscr{M}_{m,1}$.

Nous appellerons *application associée à A* l'application définie sur $\mathscr{M}_{m,1}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}$ qui au vecteur colonne $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ associe le vecteur colonne $\left(\sum_{j=1}^{m} A_{ij} \times x_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant m}$.

En résumé il s'agit de l'application

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} A_{1j} \times x_j \\ \sum_{j=1}^{m} A_{2j} \times x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} A_{nj} \times x_j \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

Exercice 2. C

On note $\vec{x} = {}^t(x_1, \ldots x_n)$. Déterminez $f(\vec{x})$ lorsque f est l'application linéaire associée à la matrice A.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3 Application linéaire.

Définition 3

Une application f de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est dite *linéaire* si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m,\ f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$.

(ii) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m,\ f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.

Exercice 3. C

Déterminez si les applications suivantes sont linéaires.

a) $f : (x_1, x_2) \mapsto (2x_1, 3x_2, x_1 + x_2)$.

b) $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto 0$.

c) $f : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, x_1 - x_2)$.

d) $f : (x_1, x_2) \mapsto (1, x_1 - 2x_2)$.

Proposition 1

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $A = (A_{ij})$ une matrice prise dans $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

L'application associée à la matrice A est linéaire.

Proposition 2

Toute application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est l'application associée à une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Exercice 4. C

Justifiez que les applications suivantes sont linéaires en donnant une matrice dont elle soit l'application associée.

a) $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

b) $f : (x_1, x_2) \mapsto (2x_1 + 3x_2, x_1 - 6x_2, -x_2)$.

c) $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_2$.

d) $f : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$.

e) $f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, x_2 + 2x_3 + 3x_4, x_3 + 2x_4)$.