22 Sommes arithmétiques et géométriques.

1 Série arithmétique : somme des termes d'une suite arithmétique.

Exemples.

1. Somme des entiers naturels de 1 à 100. Présentation géométrique avec les marches d'escalier.
2. Suite arithmétique de terme initial $u_0 = 5$ et de raison 10. La formule générale.

Proposition 1 - Somme des termes d'une suite arithmétique

Soient :

. (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $r \in \mathbb{R}$,

. $k \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{k} u_i = (k+1)\frac{u_0 + u_k}{2}.$$

Démonstration

Démonstration par récurrence.

■

Corollaire 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration

Nouvelle démonstration par la double somme.

■

Remarques.

1. Autrement dit : c'est le produit du nombre de termes par la moyenne du premier et du dernier.
2. Si le premier terme de la suite est de rang α alors pour $k \geqslant \alpha$:

$$\sum_{i=\alpha}^{k} u_i = (k+1-\alpha)\frac{u_\alpha + u_k}{2}.$$

Exercice 1. C
Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 = 2$ et de raison 3.
Calculez la somme S définie par $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{12}$.

2 Série géométrique : somme des termes d'une suite géométrique.

Lemme 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Démonstration

En distribuant on remarque des simplifications (télescopage) :

$$(x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k) = x^{k+1} - 1$$

Donc si $x \neq 1$ ($i.e.$ $x - 1 \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k)}{x-1} &= \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} \\ 1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k &= \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} \end{aligned}$$

■

Proposition 2 - Somme des termes d'une suite géométrique

Soient :

. (u_n) une suite géométrique de terme initial $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
. $k \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{k} u_i = u_0 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

Démonstration

Une démonstration sans récurrence.

En utilisant la formule explicite de la suite géométrique :

$$\begin{aligned}
&u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1} + u_k \\
&= u_0 \times 1 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \cdots + u_0 \times q^{k-1} + u_0 \times q^k \\
&= u_0 \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} + q^k\right) \\
&= u_0 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}
\end{aligned}$$

■

Exemples.

1. Pour l'exemple des grains de riz du sage Sissa et du damier d'échec :

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} + 2^{64} \\
&= 1 \times \frac{2^{64+1} - 1}{2 - 1} \\
&= 2^{65} - 1 \\
&\approx 1,844 \times 10^{19}
\end{aligned}$$

Remarques.

1. Avec une suite dont le premier terme est de rang α :

$$\sum_{i=\alpha}^{k} u_i = u_\alpha \frac{q^{k+1-\alpha} - 1}{q - 1}.$$

2. Évidemment $q \neq 1$ puisque c'est une valeur interdite pour la formule du membre de droite.
   De plus si $q = 1$ la suite est constante et : $\sum_{i=0}^{k} u_i = (k+1)u_0$.

Exercice 2. C

Partie A.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 de premier terme $u_0 = 0,2$.

1. Calculer u_{18} puis u_{50}.
2. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_{18}$, c'est-à-dire la somme des 19 premiers termes de la suite (u_n).

Partie B.

Claude a donné 20 centimes d'euros (soit 0, 20 €) à son petit-enfant Camille pour sa naissance. Ensuite, Claude a doublé le montant offert d'une année sur l'autre pour chaque anniversaire jusqu'aux 18 ans de Camille.
La somme totale versée par Claude à Camille permet-elle de payer un appartement à Angers d'une valeur de 100 000 € ?

Exercice 3. C

Un service de vidéos à la demande réfléchit au lancement d'une nouvelle série mise en ligne chaque semaine et qui aurait comme sujet le quotidien de jeunes gens favorisés.
Le nombre de visionnages estimé la première semaine est de 120 000. Ce nombre augmenterait ensuite de 2 % chaque semaine.
Les dirigeants souhaiteraient obtenir au moins 400 000 visionnages par semaine.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de visionnages n semaines après le début de la diffusion. On a donc $u_0 = 120\,000$.

1. Calculer le nombre u_1 de visionnages une semaine après le début de la diffusion.
2. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 120\,000 \times 1,02^n$.
3. À partir de combien de semaines le nombre de visionnages hebdomadaire sera-t-il supérieur à 150 000 ? *On admettra :* $\frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{\ln(1,02)} \approx 11,268$
4. On pose pour tout entier naturel n : $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Montrer que l'on a :
$$S_n = 6\,000\,000 \times (1,02^{n+1} - 1).$$
Puis en déduire le nombre total de visionnages au bout de 52 semaines.