21 Suites définies par récurrence, arithmétiques, géométriques.

I Suites définies par récurrence.

Définition 1

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *définie par récurrence* s'il existe une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = u_{n+1}.$$

II Suites arithmétiques.

1 Définition.

Définition 2

Soit (u_n) une suite de nombres.

Nous dirons que (u_n) est *arithmétique* si et seulement s'il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + r = u_{n+1}.$$

Si (u_n) est arithmétique nous dirons que r est *la raison* de la suite.

Exercice 1. C

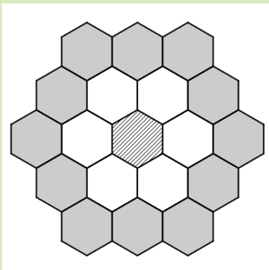
Sont donnés à chaque fois les premiers termes d'une suite dites s'il peut s'agir d'une suite arithmétique.

1. $(u_n) = (12;\ 15;\ 17;\dots)$.
2. $(v_n) = (\pi;\ 2\pi;\ 4\pi;\dots)$.
3. $(w_n) = (4;\ 3,3;\ 2,6;\dots)$.
4. $(u_n) = (-1;\ 1;\ -1;\dots)$.
5. $(v_n) = (0;\ 2\pi;\ 4\pi;\dots)$.
6. $(w_n) = (4;\ -3;\ -10;\dots)$.

Exercice 2. B

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce.
Le carrelage choisi a une forme hexagonale.
L'artisan pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :

- à l'étape 0, il entoure le carreau central, à l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme.
- à l'étape 1 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédemment construite.



On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la n-ième étape ($n \geqslant 0$).
Déterminez les trois premiers termes de la suite (u_n) et conjecturez sa nature.

Exercice 3. C

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6 000.
On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.
On désigne par u_n le nombre d'abonnés en $2019+n$ pour tout entier naturel n.
Déterminez les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa nature.

Exercice 4. C

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que $u_5 = 26$ et $u_9 = 8$. La raison de (u_n) vaut : -18 ? $\dfrac{8}{26}$? $4,5$? $-4,5$?

2 Représentation graphique.

Exercice 5.

Depuis l'an 2000 date à laquelle il recensait 3 650 clients, un site de commerce en ligne voit le nombre de ses clients augmenter chaque année de 2 500.
On désigne par u_n le nombre de clients en $2000+n$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminez la nature de (u_n).
2. Donnez une représentation graphique des 6 premiers termes de la suite.
3. Que remarquez-vous sur le précédent graphique ? Par quelle fonction serait-on tenter de modéliser la suite (u_n) ?

Proposition 1

Soit (u_n) une suite arithmétique.

Les points de coordonnées $(n; u_n)$, pour tout entier naturel n, qui forment le nuage de point représentant la suite, sont alignés.

3 Formule explicite.

Proposition 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ (et de terme initial u_0).

Quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = r \times n + u_0.$$

Exercice 6. C

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6 000.
On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.
On désigne par u_n le nombre d'abonnés en $2019+n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2020 et 2021.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. En quelle année le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019 ?

Exercice 7. C

Fanny est inscrite dans un club d'athlétisme. Elle pratique le penta bond (le penta bond est un enchaînement de cinq bonds après une course d'élan).
La première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m.
Chaque semaine, la longueur de son saut augmente de $0,1$ m.
Pour n entier naturel non nul, on note s_n la longueur, en mètres, de son saut la n-ième semaine d'entraînement.
Puisque lors de la première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m, on a $s_0 = 8$.

1. Exprimer en justifiant s_n en fonction de n pour n entier naturel non nul.
2. Pour être qualifiée à une compétition, Fanny doit faire un saut d'au moins 12 mètres.
   À partir de quelle semaine, Fanny réalisera-t-elle un tel saut ?

Exercice 8. D

Conjecturez puis démontrez la formule explicite d'une suite arithmétique de terme initial u_1 et de raison r.

4 Monotonie.

Corollaire 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $r \in \mathbb{R}$.
- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante (égale à u_0).

III Suites géométriques.

1 Définition.

Définition 3

Soit (u_n) une suite de nombres.

Nous dirons que (u_n) est *géométrique* si et seulement si il existe un nombre $q \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$u_n \times q = u_{n+1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Si (u_n) est géométrique nous dirons que q est *la raison* de la suite.

Exercice 9.

Sont donnés à chaque fois les premiers termes d'une suite. Dites à chaque fois s'il peut s'agir d'une suite géométrique.

1. $(u_n) = (8;\ 24;\ 64; \dots)$.
2. $(v_n) = (\pi;\ 2\pi;\ 4\pi; \dots)$.
3. $(w_n) = (1;\ -1;\ 1; \dots)$.

Exercice 10.

À la naissance de Lisa, sa grand-mère a placé la somme de 5 000 euros sur un compte et cet argent est resté bloqué pendant 18 ans.
Lisa retrouve dans les papiers de sa grand-mère l'offre de la banque :

> Offre.
> Intérêts composés au taux annuel constant de 3 %.
> *À la fin de chaque année le capital produit 3 % d'intérêts qui sont intégrés au capital.*

On considère que l'évolution du capital acquis, en euro, peut être modélisée par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le capital acquis, en euro, n années après la naissance de Lisa.
On a ainsi $u_0 = 5\,000$.

1. Montrer que $u_1 = 5\,150$ et $u_2 = 5\,304{,}5$.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) en précisant sa raison et son premier terme.

2 Représentation graphique.

Exercice 11.

Représentez graphiquement les 5 premiers termes de la suite géométrique (u_n) si :

a) $u_0 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$,

b) $u_0 = 1$ et $q = 1,5$,

c) $u_0 = 1$ et $q = -1,5$,

d) $u_0 = 1$ et $q = 1$,

e) $u_0 = 1$ et $q = -1$.

3 Formule explicite.

Proposition 3

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ (et de terme initial u_0).

Quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Exercice 12. C

En 2002, Camille a acheté une voiture, son prix était alors de 10 500 €. La valeur de cette voiture a baissé de 10 % par an.
La valeur de cette voiture est modélisée par une suite. On note P_n la valeur de la voiture en l'année $2002+n$. On a donc $P_0 = 10\,500$.

1. (a) Déterminer la nature de la suite (P_n).
   (b) Quelle était la valeur de cette voiture en 2010 ?
2. Camille aimerait savoir à partir de quelle année la valeur de sa voiture est inférieure à 1 500 €. Déterminez cette année.

4 Monotonie.

Proposition 4

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}_+$ et de terme initial $u_0 > 0$.
- Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante.
- Si $1 < q$ alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $q \leqslant 0$ alors (u_n) n'est pas monotone.

Exercice 13.

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 960$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1. Calculez v_1, v_2, v_3 et v_4.
2. Pour tout entier naturel n donnez l'expression de v_n en fonction de n.
3. Étudiez le sens de variation de (v_n).

IV Suites arithmético-géométrique.

Exercice 14.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0,9u_n + 90 \\ u_0 = 1000 \end{cases}$$

1. Calculez $u_1$et u_2.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout nombre entier naturel n par
$$v_n = u_n - 900.$$
   (a) Calculez v_0 et v_1.
   (b) Montrez que pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = 0,9v_n$.
   (c) Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Écrivez v_n en fonction de n.
3. Déduisez-en pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 100 \times 0,9^n + 900$.
4. Conjecturez la valeur dont semble se rapprocher u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Proposition 5

Soient :

. $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

. $b \in \mathbb{R}$,

. c l'unique solution de $x = ax + b$,

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.

La suite $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

Exercice 15. C

Un démographe étudie l'évolution de la population d'un pays.
Depuis 1969 (cette année-là, ce pays comptait 44 500 000 habitants), il constate qu'en moyenne la population a un taux de natalité de 35 pour mille et un taux de mortalité de 17 pour mille.
À ces variations, il faut ajouter 25 000 nouveaux arrivant dans ce pays et retirer 9 000 citoyens qui partent définitivement.
On note p_n la population de 1969 + n, exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminez p_0.
2. Justifiez que pour tout entier naturel n :
$$p_{n+1} = 1,018p_n + 16.$$
3. Déterminez le réel ℓ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_n = p_n - l$$
soit géométrique.
4. Déduisez-en les expressions de u_n et p_n en fonction de n entier naturel.
5. Combien d'habitants peut-on prévoir en 2012 ?
6. À partir de quelle année le nombre d'habitant dépassera-t-il les 45 milliards ?

V Exercices.

Exercice 16. C

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

1. (u_n) définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n+2)^2 - n^2$.
2. (v_n) telle que, quelque soit n entier positif, $v_n = n^2 + 1$.
3. (w_n) avec, pour tout entier naturel n, $w_n = -3n + 2$.

Exercice 17.

Les suites suivantes sont définies par des formules explicites. S'agit-il de suites géométriques ?

1. $u_n = (3 \times 4)^n \times 4$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = (-1)^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $w_n = \frac{n+2}{n+1}$ quelque soit l'entier naturel n.
4. $s_n = 7 \times 3^{n-1}$ pour tout entier n avec $n \geqslant 0$.

Exercice 18.

On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 1.$$

Démontrez que la suite (u_n) peut s'exprimez à l'aide de la formule explicite

$$u_n = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$$

pour tout entier naturel n.

Exercice 19. E

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x+1}$ une fonction.

1. (a) Donnez, en justifiant, le domaine de définition de f.

   (b) Calculez f', la dérivée de f, en précisant son domaine de dérivabilité.

   (c) Étudiez, si vous l'avez déjà appris au lycée, les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   (d) Étudiez le signe de f' et déduisez-en le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$?$		$+\infty$
f'		$?$	$\Vert$	$?$	
f	$?$	$\searrow$ $?$	$\Vert$	$?$	$\searrow$ $?$

2. On admet que la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

   Notons (R_n) la suite définie par récurrence par

$$R_{n+1} = \frac{R_n + 2}{R_n + 1},$$

   où $n \in \mathbb{N}$ et $R_0 = 2$.

   (a) Démontrez l'encadrement valable pour tout entier naturel n :

$$1 \leqslant R_n \leqslant 2.$$

   (b) Justifiez que si (R_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors forcément ℓ vérifie :

$$\ell(\ell + 1) = \ell + 2.$$

   (c) Déduisez-en que si (R_n) admet une limite ce ne peut être que $\sqrt{2}$.

Exercice 19. - suite.

3. Introduisons une suite auxiliaire $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_n = \frac{R_n - \sqrt{2}}{R_n + \sqrt{2}}.$$

   (a) Démontrez que (a_n) est une suite géométrique de terme initial $a_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et de raison $q = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

   (b) En admettant que la raison $q = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ vérifie $-1 < q < 0$ déterminez la limite de (a_n).

   (c) Concluez quant à la convergence de (R_n).