20 Raisonnement par récurrence.

I Démonstration par récurrence.

1 Logique : propositions, assertions.

2 Le principe (ou théorème) du raisonnement par récurrence.

II Récurrence double.

III Récurrence généralisée.

IV Exercices.

Exercice 1. D

Montrez, pour tout entier naturel n, que :

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Correction de l'exercice 1

a) Quelques éléments pour l'hérédité.
$\mathscr{P}(n+1)$ est une égalité, donc de la forme $A = B$. Pour la démontrer nous transformer l'écriture de A et de B en montrant $A = C$ et $B = C$ pour conclure $A = B$.
D'une part :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 \\
&= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6(n^2+2n+1) + (n^2+n)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6n^2 + 12n + 6 + 2n^3 + n^2 + 2n^2 + n}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 9n + 4n + 6}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
\end{aligned}$$

donc, par transitivité,

$$(n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

b) Pour démontrer l'hérédité il faut établir une égalité $A = B$. Nous allons partir de B et en développant astucieusement faire apparaître A.

$$\begin{aligned}\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{(n+1)n+(n+1)2}{2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\right]^2\end{aligned}$$

En dévellopant avec une identité remarquable :

$$\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + n(n+1)(n+1) + (n+1)^2$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 = n(n+1)^2 + 1 \times (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^3$$

En factorisant :

$$\begin{aligned}\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 &= (n+1)(n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^3 \\ &= (n+1)^3 + \sum_{i=0}^{n} i^3 \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} i^3\end{aligned}$$

Exercice 2. E

Montrer que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel n.

1. $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.
2. $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.
3. $n^3 - n$ est divisible par 3.
4. $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.
5. $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Correction de l'exercice 2

1.

$$\begin{aligned}2^{(n+1)+4}+3^{3(n+1)+2} &= 2^{n+5}+3^{3n+5}\\ &= 2\times 2^{n+4}+3^{3n+5}\end{aligned}$$

Astuce :

$$\begin{aligned}2^{(n+1)+4}+3^{3(n+1)+2} &= 2\times 2^{n+4}+2\times 3^{3n+2}-2\times 3^{3n+2}+3^{3n+5}\\ &= 2\left(2^{n+4}3^{3n+2}\right)-2\times 3^{3n+2}+3^3\times 3^{3n+2}\\ &= 2\left(2^{n+4}3^{3n+2}\right)+\left(-2+3^3\right)\times 3^{3n+2}\\ &= 2\left(2^{n+4}3^{3n+2}\right)+25\times 3^{3n+2}\end{aligned}$$

25 est divisible par 5 et, d'après l'hypothèse de récurrence $2^{n+4}3^{3n+2}$ est divisible par 5 donc $2^{(n+1)+4}+3^{3(n+1)+2}$ est divisible par 5.

2.

$$\begin{aligned}3^{6(n+1)+2}-2 &= 3^6\times 3^{6n+2}-2\\ &= 3^6\times(3^{6n+1}-2)+3^6\times 2-2\\ &= 3^6\times(3^{6n+1}-2)+3^6\times 2-2\\ &= 3^6\times(3^{6n+1}-2)+7\times 208\end{aligned}$$

3. Version brève : $(n-1)n(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs et l'un de ces facteurs est forcément multiple de 3.

$$\begin{aligned}(n+1)^3-(n+1) &= n^3+3n^2+3n+1-n-1\\ &= n^3-n+3(n^2-n)\end{aligned}$$

Or $3(n^2-n)$ est divisible par 3 et, d'après l'hypothèse de récurrence, n^3-n est divisible par 3 donc $(n+1)^3-(n+1)$ est divisible par 3.

4.

$$\begin{aligned}4^{n+1}-1-3(n+1) &= 4\times 4^n-1-3(n+1)\\ &= 4\times(4^n-1-3n)+4+12n-1-3(n+1)\\ &= 4\times(4^n-1-3n)+9n\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}7\times 3^{5(n+1)}+4 &= 7\times 3^5\times 3^{5n}+4\\ &= 3^5\times(7\times 3^{5n}+4)-3^5\times 4+4\\ &= 3^5\times(7\times 3^{5n}+4)-968\\ &= 3^5\times(7\times 3^{5n}+4)-88\times 11\end{aligned}$$

Exercice 3. E

On considère la proposition suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \text{ « 9 divise } 10^n + 1 \text{ ».}$$

1. Démontrez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
2. Qu'en est-il de $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(3)$? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?
3. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: 9 divise $10^n - 1$.
4. Déduisez-en à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est fausse.

Correction de l'exercice 3

1. $$\begin{aligned} 10^{n+1} + 1 &= 10 \times (10^n + 1) - 10 + 1 \\ &= 10 \times (10^n + 1) - 9 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 10^0 + 1 &= 2 \\ 10^1 + 1 &= 11 \\ 10^2 + 1 &= 101 \\ 10^3 + 1 &= 1001 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 10^{n+1} - 1 &= 10(10^n - 1) + 10 - 1 \\ &= 10(10^n - 1) + 9 \end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\mathscr{P}(n)$ est fausse.

   Supposons que $10^n + 1$ est divisible par 9. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n + 1 = 9k$.
   D'autre part, d'après les questions précédentes $10^n - 1$ es divisible par 9 donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n - 1 = 9p$.
   On en déduit successivement :

   $$\begin{aligned} 10^n + 1 - (10^n - 1) &= 9k - 9p \\ 2 &= 9(k - p) \end{aligned}$$

Donc 2 est divisible par 9 ce qui est absurde car : $0 < 2 < 9$.

Nous avons démontré par l'absurde que $10^{+}1$ n'est pas divisible par 9, et ce, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. D

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right).$$

Correction de l'exercice 4

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \quad (1).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right),$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}\left[5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)\right] + 3$$

À ce stade nous avons obtenu une formule explicite de u_{n+1}. Mais la présentation n'est pas tout à fait celle désirée. Modifions-la.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 - 5 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 3 \\ &= 5 - 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \\ &= 5 \times 1 - 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \\ &= 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Exercice 5. D

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et, pour $n \geqslant 2$: $u_n = 2u_{n-1} - n$.
Démontrez, pour tout entier naturel non nul n, que :

$$u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n.$$

Correction de l'exercice 5

Démontrons par récurrence la formule explicite de l'énoncé.

* $u_1 = 5$ et $2(2^{1-1}+1)+1 = 5$ donc la formule est vraie au rang 1.
* Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

  Supposons que $u_k = 2(2^{k-1}+1)+k$.

  Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = 2u_n - (n+1) \quad (1).$$

  Cette formule de récurrence a été obtenue en remplaçant n par $n+1$ dans la formule de l'énoncé : pas de difficulté puisque cette formule est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

  La formule (1) est en particulier vraie pour $n = k$.

  Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_k = 2\left(2^{k-1}+1\right)+k,$$

  donc, en remplaçant u_k dans l'égalité (1) on obtient :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2\left[2\left(2^{k-1}+1\right)+k\right]-(k+1) \\ &= 2\times 2\times 2^{k-1}+4+2k-k-1 \\ &= 2\times 2^k+2+1+k \\ &= 2(2^k+1)+k+1 \end{aligned}$$

  Ainsi la formule est vraie au range $k+1$.
* Nous avons démontré par récurrence que

Exercice 6. D

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + n + 1$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = \frac{11}{4}\times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}.$$

Correction de l'exercice 6

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_{n+1} = 2u_n + n + 1 \quad (1).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2},$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 3\left[\frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}\right] + n + 1 \\
&= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{9}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1 \\
&= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{6}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1 \\
&= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3n}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{2}{2} \\
&= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{-3 - 3n + 2n + 2}{2} \\
&= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{-n - 1}{2} \\
&= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{n + 1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 7. ⚽

Exercice 8. D

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } u_{n+1} = 5u_n - 1.$$

1. Calculez les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturez son expression explicite.
3. Démontrez la.

Correction de l'exercice 8

1. $u_0 = u_1 = u_2 = \frac{1}{4}$.
2. (u_n) semble être constante égale à $\frac{1}{4}$.
3. Démonstration par récurrence.
   Pour l'hérédité :

$$u_{n+1} = 5u_n - 1$$

D'arès l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5 \times \frac{1}{4} - 1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercice 9. C

Démontrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 3$, on a :

$$n^2 > 2n + 1.$$

Correction de l'exercice 9

Par récurrence et pour l'hérédité :

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &\geqslant 2n + 1 + 2n + 1 \\ &\geqslant 4n + 3 \\ &\geqslant 2(n+1) + 1 + 2n \\ &\geqslant 2(n+1) + 1 \end{aligned}$$

Exercice 10. C

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

1. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 4.
3. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. En passant à la limite dans la formule de récurrence, démontrez que la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que 4.
5. Concluez.

Correction de l'exercice 10

1. La fonction affine $f : x \mapsto \frac{1'2}{x} + 2$ est strictement croissante puisque son coefficient directeur est strictement positif.

   La démonstration se fait par récurrence. $u_0 > u_1 = 6$. Si $u_n \geqslant u_{n+1}$ alors $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}$.
2. Par récurrence. $u_0 \geqslant 4$. Si $u_n \geqslant 4$ alors $f(u_n) \geqslant f(4)$.

3. Décroissante et minorée donc convergente.
4. $\ell = \frac{1}{2}\ell + 2 \iff \ell = 4$.
5. $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 4$.

Exercice 11. E

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Démontrez que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Exercice 12. E

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.
Démontrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}.$$

Correction de l'exercice 12

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = \frac{3^{n+1}+(-1)^n}{4}$ ».

Démontrons, par une récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$, que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

* $\frac{3^{0+1}+(-1)^0}{4} = 1 = u_0$ et $\frac{3^{1+1}+(-1)^1}{4} = 2 = u_1$ donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies et démontrons qu'alors, nécessairement, $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
  D'après la formule de récurrence définissant (u_n) :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$$

  D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2 \times \frac{3^{(n+1)+1} + (-1)^{n+1}}{4} + 3 \times \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4} \\
&= \frac{2 \times \left[3^{n+2} - (-1)^{n+2}\right] + 3 \times \left[3^{n+1} + (-1)^{n+2}\right]}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left[2 \times 3^{n+2} - 2 \times (-1)^{n+2} + 3 \times 3^{n+1} + 3 \times (-1)^{n+2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(2+1)3^{n+2} + (3-2) \times (-1)^{n+2}\right] \\
&= \frac{3^{n+3} + (-1)^{n+2}}{4}
\end{aligned}$$

  Ainsi $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

* Nous avons démontré, par une récurrence double, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3^{n+1}+(-1)^n}{4}.$$

Exercice 13. E

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{4}(5u_{n+1} - u_n)$.
Démontrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{20}{3} \times \frac{1}{4^n} + \frac{17}{3}.$$

Correction de l'exercice 13

Pour l'hérédité.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{4}\left(5u_{n+1} - u_n\right)\\
&= \frac{1}{4}\left[5\left(-\frac{20}{3} \times \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{17}{3}\right) - \left(-\frac{20}{3} \times \frac{1}{4^n} + \frac{17}{3}\right)\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[-5 \times \frac{20}{3} \times \frac{1}{4^{n+1}} + 5 \times \frac{17}{3} + 4\times\frac{20}{3} \times \frac{1}{4^n}\times\frac{1}{4} + (-1) \times \frac{17}{3}\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[-5 \times \frac{20}{3} \times \frac{1}{4^{n+1}} + 4 \times \frac{20}{3} \times \frac{1}{4^{n+1}} + 4 \times \frac{17}{3}\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[(-5+4) \times \frac{20}{3} \times \frac{1}{4^{n+1}} + 4 \times \frac{17}{3}\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[-\frac{20}{3} \times \frac{1}{4^{n+1}} + 4 \times \frac{17}{3}\right]\\
&= -\frac{1}{4} \times \frac{20}{3} \times \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{4} \times 4 \times \frac{17}{3}\\
&= -\frac{20}{3} \times \frac{1}{4^{n+2}} + \frac{17}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 14. E

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2^n$.

Correction de l'exercice 14

Notons $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \leqslant 2$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons par une récurrence forte que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* $\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 \leqslant 2^0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

Exercice 15. D

Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que (u_n) est majorée par 3.
3. Déduisez-en que (u_n) converge.

Correction de l'exercice 15

1. Par récurrence $f : x \mapsto \sqrt{6 + x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. $f(3) = 3$. Par récurrence.
3. Décroissante et minorée donc convergente.

Exercice 16. E Nombre d'Apéry

On pose pour tout entier supérieur ou égale à 1 :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Justifiez que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

3. Qu'en conclure ?

Correction de l'exercice 16

1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3}$.
2.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{(n+1)^3} \\ &\leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \end{aligned}$$

Or on a successivement :

$$\begin{aligned} n(n+1) &\leqslant (n+1)^3 \\ -\frac{1}{n(n+1)} &\leqslant -\frac{1}{(n+1)^3} \\ -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} &\leqslant -\frac{1}{(n+1)^3} \end{aligned}$$

donc

$$-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3}\leqslant -\frac{1}{n+1}$$

Finalement :

$$u_{n+1}\leqslant -\frac{1}{n+1}$$

3. La suite converge.