20 Raisonnement par récurrence.

I Démonstration par récurrence.

1 Logique : propositions, assertions.

2 Le principe (ou théorème) du raisonnement par récurrence.

Le raisonnement par récurrence est un procédé qui permet de démontrer des propriétés universelles, $\mathscr{P}(n)$, qui dépendent d'entiers naturels n.

La montée de l'échelle. Si j'affirme : « si on met un pied sur un barreau de l'échelle, alors on met, obligatoirement, l'autre pied sur le barreau supérieur » alors, pour peu que l'on mette un pied sur le barreau d'en bas il faudra grimper toute l'échelle.

Théorème 1

Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.

Si les deux assertions suivantes sont vraies

(i) $\mathscr{P}(0)$ est vraie,

(ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors, forcément, $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie,

alors les assertions $\mathscr{P}(n)$ sont vraies pour tous les entiers naturels n.

II Récurrence double.

Théorème 2

Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.

$$\left.\begin{array}{c}\mathscr{P}(0) \text{ et } \mathscr{P}(1) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ [\mathscr{P}(n) \text{ et } \mathscr{P}(n+1)] \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)\end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n).$$

III Récurrence généralisée.

Théorème 3

Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.

$$\left.\begin{array}{c}\mathscr{P}(0)\\ \forall n\in\mathbb{N},\ [\forall k\in[\![0;n]\!],\ \mathscr{P}(k)]\Rightarrow\mathscr{P}(n+1)\end{array}\right\}\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ \mathscr{P}(n).$$

IV Exercices.

Exercice 1. D

Montrez, pour tout entier naturel n, que :

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Exercice 2. E

Montrer que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel n.

1. $2^{n+4}+3^{3n+2}$ est divisible par 5.
2. $3^{6n+2}-2$ est divisible par 7.
3. n^3-n est divisible par 3.
4. 4^n-1-3n est divisible par 9.
5. $7\times 3^{5n}+4$ est divisible par 11.

Exercice 3. E

On considère la proposition suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \text{« 9 divise } 10^n+1 \text{ »}.$$

1. Démontrez, pour tout $n\in\mathbb{N}$, que : si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
2. Qu'en est-il de $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(3)$? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?
3. Montrez que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: 9 divise 10^n-1.
4. Déduisez-en à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est fausse.

Exercice 4. D

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right).$$

Exercice 5. D

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et, pour $n \geqslant 2$: $u_n = 2u_{n-1} - n$.
Démontrez, pour tout entier naturel non nul n, que :

$$u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n.$$

Exercice 6. D

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + n + 1$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}.$$

Exercice 7. ⚽

Exercice 8. D

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } u_{n+1} = 5u_n - 1.$$

1. Calculez les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturez son expression explicite.
3. Démontrez la.

Exercice 9. C

Démontrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 3$, on a :

$$n^2 > 2n + 1.$$

Exercice 10. C

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

1. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 4.
3. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. En passant à la limite dans la formule de récurrence, démontrez que la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que 4.
5. Concluez.

Exercice 11. E

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Démontrez que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Exercice 12. E

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.
Démontrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}.$$

Exercice 13. E

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{4}(5u_{n+1} - u_n)$.
Démontrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{20}{3} \times \frac{1}{4^n} + \frac{17}{3}.$$

Exercice 14. E

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2^n$.

Exercice 15. D

Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que (u_n) est majorée par 3.
3. Déduisez-en que (u_n) converge.

Exercice 16. E Nombre d'Apéry

On pose pour tout entier supérieur ou égale à 1 :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Justifiez que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$
3. Qu'en conclure ?

20 Raisonnement par récurrence.