18 Limites d'une fonction.

I Voisinage.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Ainsi a peut être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $a \in \mathbb{R}$ nous appellerons *voisinage ouvert de a* tout intervalle ouvert contenant a.

Nous appellerons *voisinage ouvert de $+\infty$* tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.

Nous appellerons *voisinage ouvert de $-\infty$* tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$.

Dans cette leçon nous nous intéressons à ce qui se passe pour $f(x)$ lorsque x se rapproche de valeurs particulières dans l'ensemble de définition ou aux bornes de l'ensemble de définition. Le fait de travailler avec des voisinages signifie pouvoir choisir un ensemble qui nous facilite les choses (ne contenant pas de valeurs interdite, sur lequel la fonction est monotone, ...) : nous nous intéressons aux propriétés asymptotiques.

II Limites.

1 Définition.

Définition 1

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

Nous dirons que *f admet ℓ pour limite en a* si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \in J.$$

2 Exemples de référence.

Les résultats qui suivent sont à connaître par cœur. Ils constituent un alphabet avec lequel nous allons composer des mots.

Proposition 1 - Fonctions puissances.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $a \in \mathbb{R}$,

. $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) $x^n \underset{x \to a}{\longrightarrow} a^n$.

(ii) $x^n \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) Si n est pair alors : $x^n \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iv) Si n est impair alors : $x^n \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(v) Si $a > 0$ alors : $x^\alpha \underset{x \to a}{\longrightarrow} a^\alpha$.

(vi) $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Corollaire 1

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$|x| \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad |x| \underset{x \to a}{\longrightarrow} |a|.$$

Proposition 2 - Fonction racine carrée.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\sqrt{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{x} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \sqrt{a}$$

Proposition 3 - Fonction racine cubique.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt[3]{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{x} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \sqrt[3]{a}$$

Proposition 4 - Fonction exponentielle.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad e^x \underset{x\to a}{\longrightarrow} e^a$$

Proposition 5 - Fonction logarithme népérien.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \ln(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ln(a)$$

III Limites en un réel par valeurs supérieures et inférieures.

Nous avons été confrontés à la forme indéterminée $\frac{\cdot}{0}$. Nous allons voir une approche permettant de lever parfois cette indétermination.

Un exemple typique de la situation qui nous intéresse est celui de la fonction inverse en 0.

1 Définition.

Définition 2

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathbb{R}$.

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

Nous dirons que *f admet ℓ pour limite à gauche en a* si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que :

$$\forall x \in]-\infty, a[\cap I \cap \mathscr{D},\ f(x) \in J.$$

2 Exemples de référence.

Proposition 6 - Fonction inverse en 0.

$$\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} -\infty.$$

Proposition 7 - Fonction puissance d'un réel en 0.

$$x^{a} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 8 - Fonctions puissances négatives.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ est impaire alors :

$$\frac{1}{x^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} -\infty.$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ est paire alors :

$$\frac{1}{x^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} +\infty.$$

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ alors :

$$\frac{1}{x^a} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty.$$

Proposition 9 - Fonction logarithme népérien en 0.

$$\ln(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} -\infty, \qquad x^{n}\ln(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\beta}\,|\ln(x)|^{\alpha} = 0.$$

Proposition 10 - Fonction tangente.

$$\tan(x) \underset{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \tan(x) \underset{\substack{x\to -\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}}{\longrightarrow} -\infty.$$

3 Une astuce pour certaines limites indéterminée en un réel.

Revenons sur méthode croisée lors d'une démonstration.

Il est possible parfois d'identifier une taux de variation d'une fonction dérivable : si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)$.

IV Exercices.

Exercice 1. B