# 17 Droites de $\mathbb{R}^n$.

## I Droites affines.

### 1 Des points et des vecteurs.

Une *droite* (affine) est la donnée d'un point $A$ (le point de départ) et d'*un vecteur directeur* $\vec{u}$ (une direction à suivre). La droite est alors formée de l'ensemble des points $M$ accessibles par une translation de même direction que $\vec{u}$. Autrement dit la droite est l'ensemble $\left\{M \in \mathbb{R}^n \mid \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}\right\}$.

Nous définissons une droite $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^n$ par la donnée d'un point $A(a_1, \dots a_n)$ et d'un vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

### 2 Et leurs coordonnées.

Regardons ce qu'il se passe pour les coordonnées d'un point de la droite.

Les nombreux points de la droite sont désignés par une seule lettre $M$ mais c'est trompeur il s'agit d'un point variable, mobile. D'ailleurs, ses coordonnées variant, notons : $M(x_1, \dots, x_n)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Traduisons l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ par une expression avec des coordonnées.

$$\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tu_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ tu_n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit en considérant chaque égalité de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = a_1 + tu_1 \\ x_2 & = a_2 + tu_2 \\ \vdots & = \vdots \\ x_n & = a_n + tu_n \end{array}\right. , \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

Ce système de $n$ équations qui expriment chaque coordonnées en fonction d'un même *paramètre* $t$ (*i.e.* une variable) est appelé *une représentation paramétrique* de la droite passant par $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Nous pourrons utiliser l'égalité vectorielle de $\mathbb{R}^n$ $M = A + t\vec{u}$ comme moyen mnémotechnique pour retrouver le système.

# II Droites vectorielles.

Si $\vec{u}$ est le vecteur directeur d'une droite affine alors nous avons vu que la droite se dessine en considérant tous les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$, *i.e.* les $t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Tous ces vecteurs indiquent la même direction que $\vec{u}$ et pourraient être choisis pour vecteur directeur (sauf $\vec{0}$). Cet ensemble est appelé *la direction* de la droite ou *la droite vectorielle* associée à la droite affine.

Nous retrouvons la

**Définition 1**

Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ alors $d_{\vec{u}} = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{x} = \lambda.\vec{u}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ appelé *droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$*. On pourra noter cette droite vectorielle $\mathbb{R}.\vec{u}$.

De l'égalité $\vec{x} = t\vec{u}$ nous déduisons une représentation paramétrique de la droite vectorielle :

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = tu_1 \\ x_2 & = tu_2 \\ \vdots & = \vdots \\ x_n & = tu_n \end{array}\right., \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

Nous voyons qu'une droite vectorielle peut être vue comme une droite affine passant par l'origine du repère.

# III Équations cartésiennes de droites dans $\mathbb{R}^2$.

De la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = 3 + 4t \\ x_2 & = 5 + 6t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

d'une droite de $\mathbb{R}^2$ on déduit : $t = \frac{x_1-3}{4}$ et $t = \frac{x_2-5}{6}$. Puis par transitivité $\frac{x_1-3}{4} = \frac{x_2-5}{6}$ ou encore $6x_1 - 4x_2 + 2 = 0$.

Cette dernière égalité est appelée une équation cartésienne de la droite.

**Proposition 1**

Un ensemble de points $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ est une droite si et seulement si les points $M(x_1, x_2)$ de cette droite vérifient *une équation cartésienne* $ax_1 + bx_2 + c = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

# IV Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

**Proposition 2 - Classification des sous-espaces vectorielles de $\mathbb{R}^2$.**

Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$F$ vérifie l'une des trois situations qui s'excluent mutuellement :

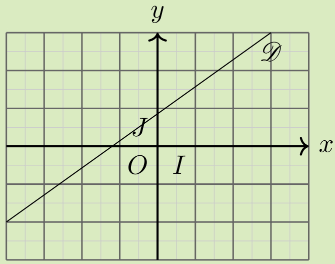
(i) $F = \{\vec{0}\}$,

(ii) Il existe $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ tel que $F$ soit la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ : $F = \mathbb{R}.\vec{u}$.

(iii) $F = \mathbb{R}^2$.

# V Exercices.

**Exercice 1.** B




1. Dessinez la droite passant par $A(3;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.
2. Déterminez un point et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

**Exercice 2.** C

Donnez une représentation paramétrique de la droite passant par $B(3;-7)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

**Exercice 3.** C

Dites si le point appartient ou non à la droite $\mathscr{D}$ dont la représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x_1 & = -2t + 4 \\ x_2 & = 7t - 28 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

a) $A()$.

**Exercice 4.** C

**Exercice 5.** C

**Exercice 6.** C