16 Suites monotones.

I Caractérisations de la monotonie d'une suite.

1 Les suites, des fonctions comme les autres.

2 Comparaison arithmétique.

3 Comparaison géométrique.

II Théorème de la limite monotone.

1 Limite finie.

2 Limite infinie.

3 Suites adjacentes.

III Exercices.

Exercice 1. C

Déterminez la monotonie des suites dont on donne le terme général.

a) $\sqrt{n}$. b) e^n. c) $\dfrac{1}{n}$. d) n^2.

e) n^3. f) $\sqrt[3]{n}$. g) $\ln(n)$. h) $\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

i) $\tan(n\pi)$. j) $-\frac{13}{3}n+2$. k) $n^2+\sqrt{n}$.

Exercice 2. C

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Prouvez que (u_n) est croissante et majorée puis concluez.
Pour établir la majoration on établira, pour tout entier $k > 1$:

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Correction de l'exercice 2

La croissance est triviale.
On remarque un télescopage sur les sommes majorant : $u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 3. C

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrez que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

et déduisez-en la convergence de (u_n).

2. Montrez que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et concluez.

Correction de l'exercice 3

1.
2. Démontrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ donc (u_n) est strictement croissante.
* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n - u_n = \frac{1}{n}$ donc $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ v_{n+1} - v_n &\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

En tenant compte de l'encadrement démontré à la question précédente :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &\leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes.}}$$

Nous en déduisons que

$$\boxed{(v_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente et a la même limite que la suite } (u_n)_{n\geqslant 1}\ .}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui est appelée la série de Riemann de paramètre 2 joue et jouera pour nous un rôle important. Nous ne l'avons pas encore démontré mais sa limite est $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4. C

Montrez que les suites (u_n) et (v_n) dont le terme général est donné ci-dessous sont adjacentes :

$$u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}.$$

Exercice 5. D

Montrez que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ converge.

Correction de l'exercice 5

* La suite est croissante : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$.
* (v_n) est majorée par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \leqslant 1$.

Exercice 6. D

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Correction de l'exercice 6

Il s'agit d'une situation classique. Nous séparons la suite en deux suites extraites qui regroupées forment la suite toute entière. Il s'agit d'une astuce usuelle pour déterminer la limite d'une suite.

Démontrons que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+1} \\ &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \\ &= -\frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2+1} \\
&= -\frac{1}{2n+4} + \frac{1}{2n+3} \\
&= \frac{1}{(2n+4)(2n+3)} \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

Donc $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est croissante.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+2}$$

Or $-\frac{1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $S_{2n+1} - S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Les deux suites obtenues en regardant les termes de rangs pairs et impairs sont donc convergentes et nous admettrons que nous pouvons en déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est la même que celle des suites extraites.

Exercice 7. E

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Prouvez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u_{2^{m+1}} - u_{2^m} \geqslant \frac{1}{2}$.
3. Déduisez-en que (u_n) n'est pas majorée. Concluez.

Correction de l'exercice 7

1. Somme de termes positifs.

2.

$$\begin{aligned} u_{2^{m+1}} - u_{2^m} &= \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \\ &\geqslant \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} \\ &\geqslant \frac{2^{m+1}-2^m}{2^{m+1}} \\ &\geqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. $u_{2^m} = (u_{2^m} - u_{2^{m-1}}) + \cdots + (u_{2^2} - u_{2^1}) + (u_{2^1} - u_{2^0}) + u_{2^0} \geqslant \frac{m}{2}$.

Exercice 8. E

Soient $x \in [0,1]$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ et } v_n(x) = u_n(x) + \frac{x^n}{n \times n!}.$$

1. Vérifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$,

$$v_{n+1} - v_n = -x^n \frac{(n^2+2n)(1-x)+1}{n(n+1)\times(n+1)!}.$$

2. Déduisez-en que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes. Que pouvez-vous en déduire ?
3. Montrez que la limite de $(u_n(1))$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 9. E

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \text{ et } v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n.$$

Montrez que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Correction de l'exercice 9

Démontrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

* Montrons que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
Chaque terme de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est formé d'un produit de nombre strictement positifs donc est strictement positif (et, nous en aurons besoin ensuite, il en est de même pour $(v_n)_{n\geqslant 1}$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}\\ &= 1+\frac{1}{(n+1)^2}\\ &\geqslant 1\end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

* Montrons que $(v_n)_{n\geqslant 1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement positive :

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)u_{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n}\\ &= \frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\times\frac{u_{n+1}}{u_n}\\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &= \frac{n}{n+1}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}\right]\\ &= \frac{n}{n+1}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^4}{1-\frac{1}{n+1}}\right]\\ &= \frac{n}{n+1}\times\frac{n+1}{n}\left[1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^4\right]\\ &= 1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^4\\ &\leqslant 1\end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

* La différence $v_n - u_n = \frac{1}{n}u_n$ ne permet pas de trouver la limite. Il faut donc procéder autrement ici, inhabituellement nous allons utiliser les limites de (u_n) et (v_n) pour conclure.

Montrons que $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.
Donc $u_n = \frac{v_n}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Puisque les suites convergent vers la même limite ℓ :

$$v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.