16 Suites monotones.

I Caractérisations de la monotonie d'une suite.

1 Les suites, des fonctions comme les autres.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction que l'on peut noter plus classiquement, $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Une suite est donc *monotone* si et seulement si elle est monotone en tant que fonction.

Nous aurons par exemple, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si : $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ (n < m) \Rightarrow (u_n < u_m)$.

En fait il faut et il suffit que les termes successifs de la suite soit dans l'ordre croissant pour que la suite soit croissante. Par exemple si je construis une suite en ajoutant 3 à chaque terme la suite est croissante car chaque nouveau terme est plus grand que le précédent.

Proposition 1

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}.$$

Remarques.

1. Il y a des proposition comparables pour croissante, décroissante et strictement décroissante.

Il arrive qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction d'une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.

Par exemple la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 2 - Condition suffisante de monotonie.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application.

Si f est croissante (respectivement strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante) alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante).

Remarques.

1. La réciproque est fausse : si la suite est monotone la fonction sur $\mathbb{R}_+$ n'est pas forcément monotone.

2. Si la fonction f n'est pas monotone on ne peut rien conclure pour la suite qui peut être monotone ou pas.

2 Comparaison arithmétique.

Proposition 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite numérique.

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0.$$

Démonstration

Rappelons la définition de fonction strictement croissante. Une fonction f est strictement croissante si et seulement si pour tous nombres a et b choisis dans son ensemble de définition si $a < b$ alors, forcément, $f(a) < f(b)$.

Notons $\mathscr{D}_p = \{p;\ p+1;\ \dots\}$.

* Soit n$\geqslant p$ un entier naturel.
  Si u est une fonction strictement croissante sur $\mathscr{D}_p$, alors par définition de la croissance : quelque soient a et b dans $\mathscr{D}_p$, si $a < b$ alors $u(a) < u(b)$.
  En particulier pour $a = n$ et $b = n+1$: $u(n) < u(n+1)$.
  Autrement dit : $0 < u(n+1) - u(n)$.
* Supposons que, quelque soit $n \geqslant p$, $u_{n+1} > u_n$ et démontrons que u est strictement croissante.
  Soient $a < b$ deux éléments de $\mathscr{D}_p$. Nous avons de proche en proche : $u(a) < u(a+1) < u(a+2) < \cdots < u(b)$.
  Ainsi u est strictement croissante.

■

Nous avons des résultats similaires pour croissante, décroissante, strictement décroissante.

Exemples.

1. Afin de connaître le sens de variation de la suite définie, pour tour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ nous devons étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Soit donc $n \in \mathbb{N}$.
   Comme $u_{n+1} = (n+1)^2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= 2n+1 \end{aligned}$$

Donc : $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2. La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$ et $u_0 = 0$ est strictement croissante puisque, quelque soit le $n \in \mathbb{N}$ choisi nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 1$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, pour tout entier naturel n. Et par conséquent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Remarques.

1. Ce résultat est incontournable en particulier pour les suites définies par récurrence.
2. Une analogie avec les suites arithmétiques est possible. Nous regardons si la raison (qui ici est en fait variable), c'est à dire la variation absolue entre deux termes consécutifs est positive ou non. Comme pour les suites arithmétiques : si la raison est positive alors la suite est croissante.

3 Comparaison géométrique.

Pour comparer deux nombres positifs on fait leur rapport que l'on compare alors à 1.

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite de nombres strictement positifs.

$(u_n)_{n \geqslant 0}$ est strictement croissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

Exemples.

1. La suite $(n!)$ est croissante puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \geqslant 1$.

Remarques.

1. Ce résultat nécessite d'avoir des suites de signe constant et ne s'annulant pas. Il faut de plus que l'expression du terme général de la suite s'y prête : quotient, produit, factoriel,...

II Théorème de la limite monotone.

1 Limite finie.

Proposition 5 - Théorème de la limite monotone.

(i) Toute suite réelle croissante et majorée est convergente vers sa borne supérieure.

(ii) Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente vers sa borne inférieure.

Démonstration

(i) L'ensemble de tous les termes de la suite, $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure que nous noterons ℓ.

Démontrons que (u_n) converge vers ℓ.

Soient a et b des réels tels que $a < \ell < b$.
Puisque ℓ est la borne supérieure de de l'ensemble des termes de la suite, il existe un entier N pour lequel $u_N \in]a, \ell]$.
Comme la suite et majorée par ℓ et croissante nous en déduisons que :

$$\forall n \geqslant N,\ u_n\ ]a, \ell].$$

Enfin, puisque $]a, \ell] \subset]a, b[$, nous pouvons conclure :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell.}$$

(ii) Idem.

■

Remarques.

1. Contrairement au théorème d'encadrement, celui-ci ne permet pas de connaître la limite mais uniquement son existence en tant que borne inférieure.
2. L'utilisation de ce résultat se prolonge en général par une recherche d'encadrement de la limite par divers procédés notamment algorithmiques.
3. En général la limite n'est pas le majorant ou le minorant.

Exemples.

1. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par -1 donc elle est convergente. Nous savons même qu'elle converge vers 0.

2 Limite infinie.

Proposition 6 - Théorème de la limite monotone.

(i) Toute suite réelle croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.

(ii) Toute suite réelle décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration

(i) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrons que, à partir d'un certain rang, tous les termes de (u_n) sont dans $]A, +\infty[$.

Puisque (u_n) n'est pas majorée par A il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_N > A$.
Et comme (u_n) est croissante :

$$\forall n \geqslant N,\ u_n > A.$$

Autrement dit à partir de ce rang N tous les termes de la suite sont dans $]A, +\infty[$.

$$\boxed{(u_n) \text{ tend vers } +\infty.}$$

(ii) Ce déduit de (i) en considérant $(-u_n)$.

■

3 Suites adjacentes.

Proposition 7 - Suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

Si

(i) (u_n) est croissante,

(ii) (v_n) est décroissante et

(iii) $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

alors les suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* et dans ce cas elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

Démonstration

$w_n = v_n - u_n$ est décroissante car $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$. Comme la limite (w_n) est 0 on en déduit que $u_n \leqslant v_n$.

Donc : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$ donc (u_n) est croissante et majorée par u_0 donc converge vers un réel ℓ. De même (v_n) converge vers une réel ℓ'. Comme $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\ell - \ell' = 0$.

■

Exemples.

1. $u_n = 2 - \frac{3}{n^2}$ et $v_n = 2 + \frac{3}{n^2}$.
2. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$ sont adjacentes.
3. Pour tout entier $n \geqslant 2$ on note

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) \text{ et } v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n).$$

$(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes et convergent vers un nombre appelé constante d'Euler et noté γ.

III Exercices.

Exercice 1. C

Déterminez la monotonie des suites dont on donne le terme général.

a) $\sqrt{n}$.
b) e^n.
c) $\dfrac{1}{n}$.
d) n^2.
e) n^3.
f) $\sqrt[3]{n}$.
g) $\ln(n)$.
h) $\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
i) $\tan(n\pi)$.
j) $-\frac{13}{3}n+2$.
k) $n^2+\sqrt{n}$.

Exercice 2. C

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Prouvez que (u_n) est croissante et majorée puis concluez.
Pour établir la majoration on établira, pour tout entier $k > 1$:

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Exercice 3. C

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrez que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

et déduisez-en la convergence de (u_n).

2. Montrez que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et concluez.

Exercice 4. C

Montrez que les suites (u_n) et (v_n) dont le terme général est donné ci-dessous sont adjacentes :

$$u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}.$$

Exercice 5. D

Montrez que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ converge.

Exercice 6. D

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Exercice 7. E

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Prouvez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u_{2^{m+1}} - u_{2^m} \geqslant \frac{1}{2}$.
3. Déduisez-en que (u_n) n'est pas majorée. Concluez.

Exercice 8. E

Soient $x \in [0, 1]$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ et } v_n(x) = u_n(x) + \frac{x^n}{n \times n!}.$$

1. Vérifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$,
$$v_{n+1} - v_n = -x^n \frac{(n^2 + 2n)(1 - x) + 1}{n(n+1) \times (n+1)!}.$$
2. Déduisez-en que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes. Que pouvez-vous en déduire ?
3. Montrez que la limite de $(u_n(1))$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 9. E

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \text{ et } v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n.$$

Montrez que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.