15 Probabilité conditionnelle.

I Définition.

II Exercices.

Exercice 1.

On fait l'hypothèse que la probabilité de mettre au monde une fille est de $\frac{1}{2}$.
M. X et Mme Y ont deux enfants. Quelle est la probabilité qu'ils aient deux filles ?
On arrive chez eux. Un enfant ouvre la porte. C'est une fille. Quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit une fille ?
Et si en plus, elle nous dit qu'elle est l'aînée, quelle est la probabilité que la seconde soit une fille ?

Exercice 2.

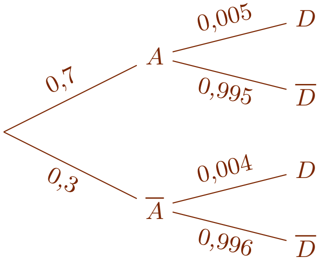
On lance une fois un dé parfait. On sait que le résultat est un nombre inférieur ou égal à 5. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 ?

Exercice 3.

Dans une usine, deux lignes de montage fabriquent des composants électroniques. La ligne A fabrique 70 % des composants. Le reste est fabriqué par la ligne B. La ligne A a un taux de composants défectueux en sortie de $0,5$ %. Pour la ligne B, ce taux est de $0,4$ %. On choisit au hasard un composant à la sortie de l'usine.

1. Quelle est la probabilité que ce composant ait été fabriqué par la ligne A et présente un défaut ?
2. Calculez la probabilité que ce composant présente un défaut.
3. En déduire, le composant présentant un défaut, la probabilité que ce composant ait été fabriqué sur la ligne A.

Correction de l'exercice 3



1. Calculons $\mathbb{P}(A \cap D)$.

   $\mathbb{P}(A) > 0$, donc d'après la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap D) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(D)\\ &= 0,7 \times 0,005\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C \cap R) = 0,0035.}$$

   Calculons $\mathbb{P}(D)$.

   $\{A; \overline{A}\}$ constituent un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(D \cap \overline{A})$$

   Comme $\mathbb{P}(\overline{A}) > 0$, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= 0,0035 + \mathbb{P}(\overline{A}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{A}}(D)\\ &= 0,0035 + 0,30 \times 0,004\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = 0,0047.}$$

2. Calculons $\mathbb{P}_D(A)$.

   Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(D) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{0,0035}{0,0047}\\ &\approx 0,74468\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_D(A) \approx 0,7447.}$$

Exercice 4.

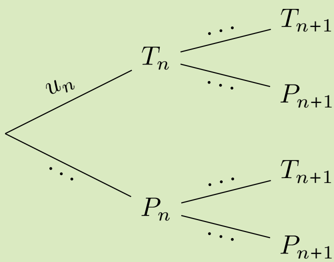
La cuisine A et la salle d'un restaurant B sont reliées entre elles de la façon suivante : A ouvre sur B et B ouvre sur l'extérieur. Une mouche initialement dans la cuisine souhaite y rester. Mais elle ne contrôle pas son trajet qui est aléatoire et régi par les règles suivantes : à chaque instant si elle est dans la pièce A, elle reste dans la pièce A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et passe dans la pièce B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$; si elle est dans la pièce B, elle reste dans la pièce B avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, passe dans la pièce A avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et sort à l'air libre avec une probabilité de $\frac{1}{4}$. Si elle sort elle ne rentre plus.
Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement « la mouche est dans la pièce A à l'instant n » et B_n l'événement « la mouche est dans la pièce B à l'instant n ». On considère a_n et b_n leur probabilités respectives.

1. Justifiez que, pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1})$ et $B_{n+1} = (A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$.
   Déduisez-en que $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$ et $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$.
2. Montrez que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 2a_{n+1}$.
3. Déduisez-en pour tout entier naturel non nul n, a_n en fonction de n. Calculez sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Interprétez ce résultat.

Exercice 5.

Dans un zoo l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisir le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$. Si un manchot choisir le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère les événements T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage » et P : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage ».
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \mathbb{P}(T_n)$.

1. (a) Donnez les valeurs de $\mathbb{P}(T_1)$, $\mathbb{P}(P_1)$, $\mathbb{P}_{T_1}(T_2)$ et $\mathbb{P}_{P_1}(T_2)$.
   (b) Montrez que $\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{4}$.
   (c) Recopiez et complétez l'arbre ci-dessous.



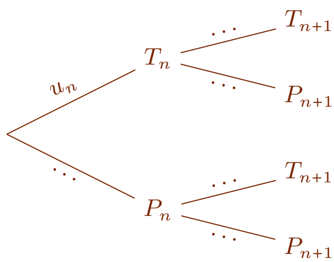
   (d) Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2.$$

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.
   (a) Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Précisez son premier terme.
   (b) Exprimez v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Calculez la limite de la suite (u_n).

Correction de l'exercice 5

1. (a) $\mathbb{P}(T_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(P_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}_{T_1}(T_2) = 0,3$ et $\mathbb{P}_{P_1}(T_2) = 0,2$.
   (b) $\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{4}$.



(c)

(d) Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2.$$

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.

   (a) Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Précisez son premier terme.

   (b) Exprimez v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   (c) Calculez la limite de la suite (u_n).