14 Compléments sur les fonctions.

I Fonctions périodiques.

Certaines courbes représentatives d'applications sont formées par la répétition infinie d'un même motif. On dit qu'elle sont périodiques en ce sens que, périodiquement, en parcourant leur courbe représentative, on retrouve le même motif.

Définition 1

Soient :

. E et F des parties de $\mathbb{R}$,

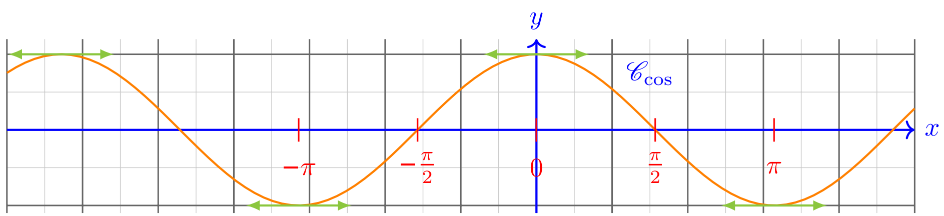
. $f : E \to F$ une application,

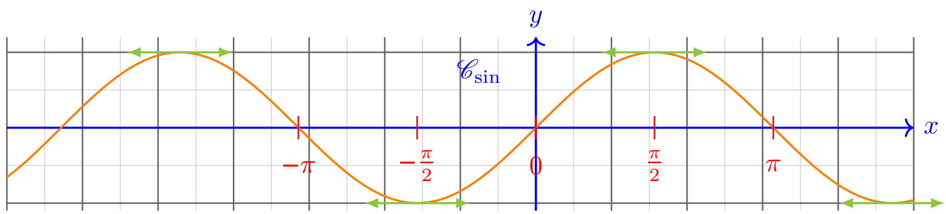
. $T \in \mathbb{R}_+^*$.

f est dite *T-périodique* si : $\forall x \in E,\ f(x+T) = f(x)$.

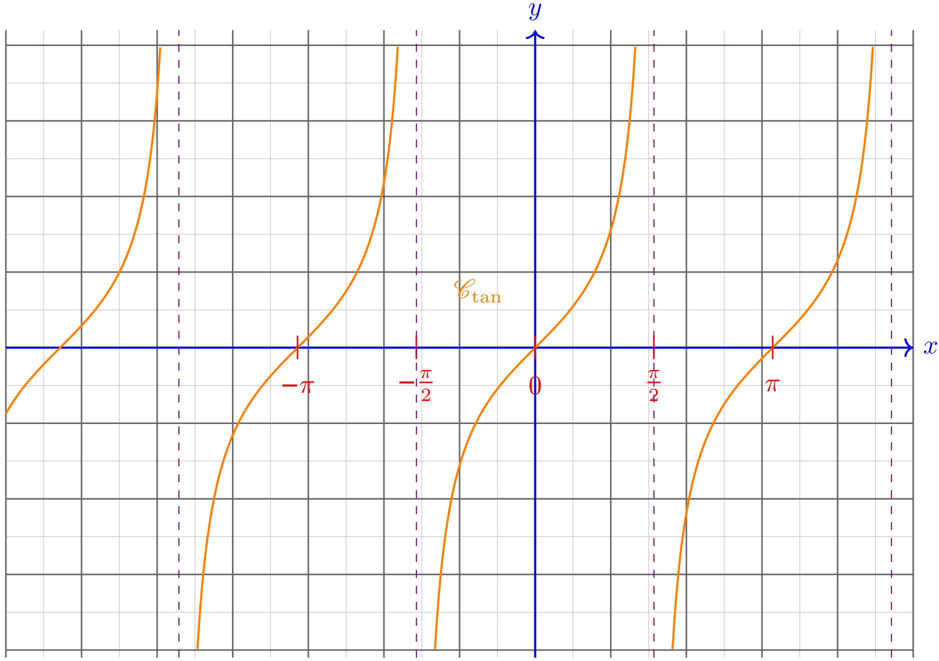
Exemples.

1. Les fonctions constantes sont périodiques.
2. Les fonctions cosinus, notée cos, et sinus, notée sin, sont des fonctions 2π-périodiques. La définition du cosinus et du sinus du lycée avec le cercle trigonométrique.





3. La fonction tangente est π-périodique.



4. Fonction affine par morceaux périodique.
5. La fonction $f : x \mapsto x + 1$ n'est pas périodique. Si $f(x) = f(x + T)$ alors $x + 1 = x + 1 + T$ et $T = 0$.

Le nombre T est appelé *une période* de f.
On peut dire qu'une fonction est *périodique* sans préciser la valeur de T.

II Fonctions paires et impaires.

Certaines courbes représentatives d'applications présentent des symétries par rapport à l'origine du repère ou par rapport à l'axe des ordonnées on dit alors qu'elles sont impaires ou paires.

Définition 2

Soient :

. E et F des parties de $\mathbb{R}$, la partie E étant symétrique par rapport à 0,

. $f : E \to F$ une application.

La fonction f est dite *paire* si et seulement si : $\forall x \in E,\ f(-x) = f(x)$.

La fonction f est dite *impaire* si et seulement si : $\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$.

Exemples.

1. $x \mapsto x + 1$ n'est ni paire ni impaire.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^{2n}$ est une application paire sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^{2n+1}$ est une application impaire sur $\mathbb{R}$.
4. cos est paire tandis que sin et tan sont impaires.
5. La fonction $x \mapsto x + 1$ n'est ni paire ni impaire car $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2$. On n'a ni $f(-1) = f(1)$ ni $f(-1) = -f(1)$.
6. exp, ln et $x \mapsto \sqrt{x}$ ne sont ni paires ni impaires.

III Fonctions majorées, minorées, bornées.

Nous avons déjà dit qu'une application $f : E \to F$ est majorée (resp minorées, resp. bornée) si et seulement si la partie $f(E)$ l'est.

IV Monotonie et stricte monotonie.

Définition 3

Soient :

. E, F et G des parties de $\mathbb{R}$ avec $G \subset E$,

. $f : E \to F$ une application.

Nous dirons que f est *croissante sur* G si et seulement si : $\forall x_1, x_2 \in G,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Nous dirons que f est *décroissante sur* G si et seulement si : $\forall x_1, x_2 \in G,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Nous dirons que f est *strictement croissante sur* G si et seulement si : $\forall x_1, x_2 \in G,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Nous dirons que f est *strictement décroissante sur* G si et seulement si : $\forall x_1, x_2 \in G,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Si f est soit croissante soit décroissante sur E on dit qu'elle est *monotone*.

Si f est soit strictement croissante soit strictement décroissante sur E on dit qu'elle est *strictement monotone*.

Exemples.

1. La fonction cube est strictement monotone sur $\mathbb{R}$, elle est strictement croissante.
2. La fonction carré n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ mais elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Proposition 1 - Monotonie des fonctions affines.

Soient :

. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

. $f : x \mapsto ax + b$ une application définie sur $\mathbb{R}$.

f est strictement croissante si et seulement si $a > 0$.
f est strictement décroissante si et seulement si $a < 0$.
f est constante si et seulement si $a = 0$.

V Exercices.

Exercice 1. B

Exercice 2. C

a) Montrez que l'application $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, est paire et pas impaire.

b) Montrez que l'application $f : x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$, définie sur $\mathbb{R}$ est périodique.

c) Montrez que l'application $f : x \mapsto \sqrt{|\sin(x)|}$ définie sur $\mathbb{R}$ est périodique et paire.

d) Montrez que l'application $f : x \mapsto \ln\left(x^8\right)$, définie sur $\mathbb{R}^*$ est paire.

Exercice 3. C

Étudiez la monotonie des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto 2x - 17$.
b) $f : x \mapsto 8 - 16x$.
c) $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x + 1$.
d) $f : x \mapsto -10^3$.
e) $f : x \mapsto x^2$.
f) $f : x \mapsto \dfrac{-2x + 1}{-3}$.