13 Bornes.

I Majorant, minorant.

Définition 1

Soit $E \subset \mathbb{R}$ (un ensemble de nombres réels).

Nous dirons qu'un nombre $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de E si : $\forall x \in E,\ x \leqslant M$.

Nous dirons qu'un nombre $n \in \mathbb{R}$ est un minorant de E si : $\forall x \in E,\ m \leqslant x$.

Remarques.

1. Si E admet un majorant on dit que l'ensemble E est majoré.
2. Si E admet un minorant on dit que l'ensemble E est minoré.
3. Si E admet un majorant et un minorant on dit que l'ensemble E est *borné*.
4. Les majorants et minorant ne sont jamais uniques.
5. Si $f : E \to F$, avec $E, F \subset \mathbb{R}$, est une application, alors on appelle majorants et minorants de f les majorants et minorants de $f(E)$.
6. Si (u_n) est une suite de nombres réels, alors on appelle majorants et minorants de (u_n) les majorants et minorants de $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

II Maximum, minimum.

Définition 2

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
On dit que M est le maximum de E si M est un majorant de E et si $M \in E$.
On dit que m est le minimum de E si m est un minorant de E et si $m \in E$.

Remarques.

1. Le maximum et le minimum de E se notent respectivement $Max(E)$ et $Min(E)$.
2. Il y a unicité du maximum et du minimum.
3. Il n'existe pas forcément de maximum ou de minimum.
4. Le maximum ou le minimum d'une application $f : E \to F$ sont ceux de $f(E)$.

III Borne supérieure, borne inférieure.

Nous avons vu que 1 est majorant de $[0;1[$ sans en être un maximum. Cependant nous devinons que 1 est le meilleur majorant possible. Nous dirons que c'est une borne supérieure.

Définition 3

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
On appelle borne supérieure de E le plus petit de ses majorants s'il existe.
On appelle borne inférieure de E le plus grand de ses minorants s'il existe.

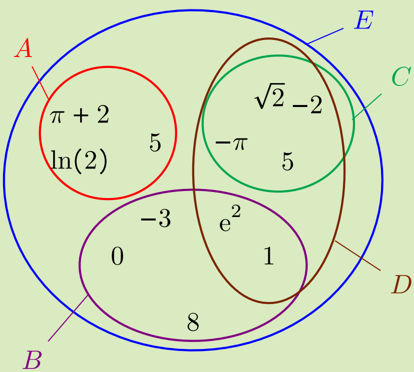
Théorème 1 - de la borne supérieure.

Toute partie non vide est majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

IV Exercice.

Exercice 1. B

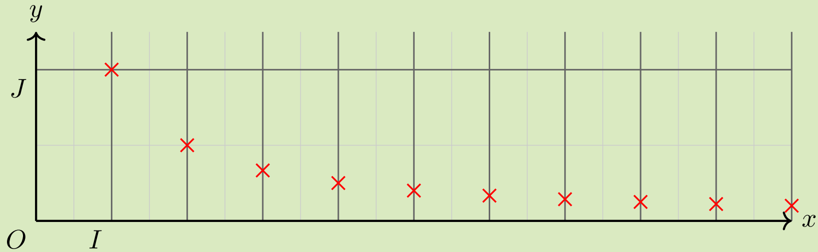
On considère les ensembles A, B, C, D et E tels que schématisés ci-dessous.



Donnez des majorants, minorants, maximum et minimums des différents ensembles.

Exercice 2. B

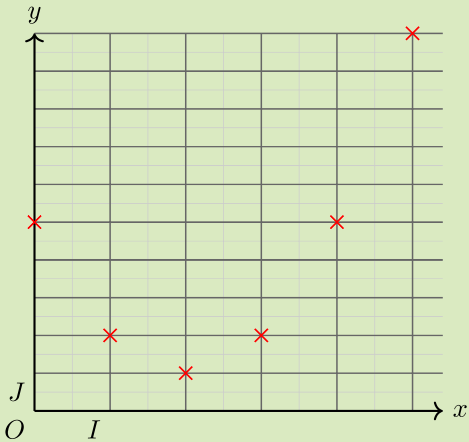
On représenté ci-dessous par un nuage de points les premiers termes d'une suite (u_n).



Conjecturez par lecture graphique les éventuels bornes supérieure et inférieure, maximum et minimum de la suite (u_n).

Exercice 3. B

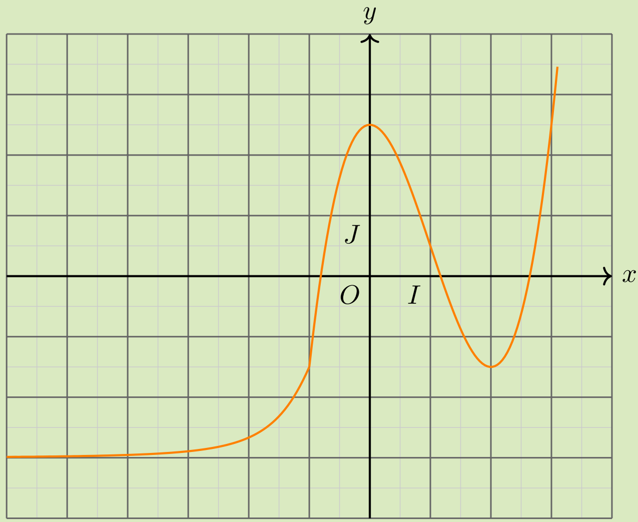
On représenté ci-dessous par un nuage de points les premiers termes d'une suite (u_n).



Conjecturez par lecture graphique les éventuels bornes supérieure et inférieure, maximum et minimum de la suite (u_n).

Exercice 4. B

On a dessiné ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.



Conjecturez par lecture graphique les éventuels bornes supérieure et inférieure, maximum et minimum de la suite (u_n).

Exercice 5. C

Conjecturez les éventuels bornes supérieure et inférieure, maximum et minimum pour les ensembles proposés.

a) $\{-3; 4; \pi; -12\}$.

b) $[\![-2, 15]\!]$.

c) $\mathbb{N}$.

d) $\mathbb{Z}$.

e) $\mathbb{R}^*$.

f) $]-\infty; -2]$.

g) $]-1; 1[$.

h) $]1; 3] \cup \{0\}$.

Exercice 6. C

Déterminez d'après le tableau de variation proposé les les éventuels bornes supérieure et inférieure, maximum et minimum de la fonction f.

a)

x	-2		0		$+\infty$
f			10		
	4	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

b)

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
f	$+\infty$				5		
		$\searrow$	-10	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

c)

x	0		10		$+\infty$
f	-3				7
		$\searrow$	-5	$\nearrow$	

d)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	e		$\Vert$	$+\infty$	
		$\searrow$	0 $\Vert$	$\searrow$	e

Exercice 7. D

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

- (v_n) est bornée,
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démontrez que $(u_n + v_n)_n$ tend vers $+\infty$.

13 Bornes.