12 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels.

I Combinaisons linéaires.

II Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

III Colinéarité.

IV Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

V Exercices.

Exercice 1. C

Trouvez si possible des nombres a et b de sorte que les combinaisons suivantes soient nulles.

a) $a.\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}-21\\14\end{pmatrix}$.
b) $a.\begin{pmatrix}6\\15\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}-4\\-10\end{pmatrix}$.
c) $a.\begin{pmatrix}-16\\50\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}4\\-25\end{pmatrix}$.
d) $a.\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1

a)

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a & -7b & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour chaque valeur de b une valeur de a convient il y a une infinité de solutions : $(a,b)=(7,1)$ convient.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrcl} 3a & -2b & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour chaque valeur de b une valeur de a convient il y a une infinité de solutions : $(a,b)=(2,3)$ convient.

c)

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a & & = & 0 \\ & b & = & 0 \end{array}\right.$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b)=(0,0)$.

d)

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a & & = & 0 \\ & b & = & 0 \end{array}\right.$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b)=(0,0)$.

Exercice 2. C

Trouvez si possible des nombres a et b de sorte que les égalités soient vérifiées.

a) $a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) $a \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$.

c) $a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

d) $a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2

a)

$$\begin{cases} a & & = & \frac{11}{5} \\ & b & = & \frac{29}{5} \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a, b) = \left(\frac{11}{5}, \frac{29}{5}\right)$.

b)

$$\begin{cases} a & & = & \frac{29}{3} \\ & b & = & \frac{28}{3} \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a, b) = \left(\frac{29}{3}, \frac{28}{3}\right)$.

c)

$$\begin{cases} a & & = & -\frac{37}{10} \\ & b & = & -\frac{13}{5} \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a, b) = \left(-\frac{37}{10}, -\frac{13}{5}\right)$.

d)

$$\begin{cases} a & & = & -7 \\ & b & = & 5 \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a, b) = (-7, 5)$.

Exercice 3. C

Dites si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On note : $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

a) $F_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2 = 0 \right\}$.

b) $F_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = 4 \right\}$.

c) $F_3 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 - x_3 = 0 \right\}$.

d) $F_4 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0 \right\}$.

e) $F_5 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = -3x_3 \text{ et } x_2 = 5x_3 \right\}$.

f) $F_6 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = -3x_3 \text{ et } x_2 = 0 \right\}$.

g) $F_7 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = -x_3 + 1 \text{ et } x_2 = x_3 \right\}$.

Exercice 4. C

Dites si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. *La présentation des ensembles est un peu différente.*

a) $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r - s = 0 \text{ et } s + t = 0 \right\}$.

b) $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

c) $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$.

d) $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r + s + t = 1 \right\}$.

e) $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2r + 3s = 0 \right\}$.

Correction de l'exercice 4

a)

$$(ax_1 + y_1) - (ax_2 + y_2) = a(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)$$

Or $x \in F_1$ donc $x_1 - x_2 = 0$ et $y \in F_1$ donc $y_1 - y_2 = 0$, d'où

$$(ax_1 + y_1) - (ax_2 + y_2) = 0$$

De même

$$(ax_2 + y_2) + (ax_3 + y_3) = a(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)$$

Or $x \in F_1$ donc $x_2 + x_3 = 0$ et $y \in F_1$ donc $y_2 + y_3 = 0$, d'où

$$(ax_2 + y_2) + (ax_3 + y_3) = 0$$

Ainsi : $a \cdot x + y \in F_1$.

b) C'est un sous espace vectoriel.

c) C'est aussi un sous espace vectoriel. C'est même une droite vectorielle.

d) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel car $0 \notin F_4$.

e) C'est un sous-espace vectoriel.

Exercice 5. C

Dites si les vecteurs proposés sont colinéaires ou pas.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ \sqrt{\pi} + 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \pi - \sqrt{\pi} \\ \pi - 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0,4 \\ -0,1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 1,2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7,2 \\ -42 \\ 30 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. E

Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ des vecteurs éléments de $\mathbb{R}^2$.

1. Sous-espace vectoriel engendré par un vecteur. Démontrez que $E_1 = \{a.\vec{x} \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs. Démontrez que $E_2 = \left\{a.\vec{x} + b\vec{y} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.