12 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels.

I Combinaisons linéaires.

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

Nous appellerons *combinaison linéaire* des vecteurs x et y tout vecteur de la forme

$$a.\vec{x} + b.\vec{y},$$

avec a et b des réels.

Remarques.

1. On définirait de la même façon des combinaisons linéaires de 3 ou 4 vecteurs. Pour une famille finie (a_i) de nombres et une famille finie $(\vec{x}_i)$ de vecteur, $\sum_i a_i.\vec{x}_i$ est une combinaison linéaire.
2. Nous pouvons remarquer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. En effet :

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

3. De même tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ car

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Exemples.

1. Le vecteur $3 \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

2. Déterminons des réels a et b de sorte que $a\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.

   L'égalité vectorielle équivaut au système de deux équations :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 2a & -3b & = & 5 \\ -3a & +5b & = & -2 \end{array}\right.$$

   En multipliant la deuxième ligne par -1 ($L_2 \leftarrow -1\cdot L_2$) puis en intervertissant les deux lignes ($L_1 \leftrightarrow L_2$) :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 3a & -5b & = & 2 \\ 2a & -3b & = & 5 \end{array}\right.$$

   En soustrayant la seconde ligne à la première ($L_1 \leftarrow L_1 - L_2$) :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} a & -2b & = & -3 \\ 2a & -3b & = & 5 \end{array}\right.$$

   En faisant : $L_2 \leftarrow L_2 - 2\cdot L_1$

$$\left\{\begin{array}{rrcr} a & -2b & = & -3 \\ & b & = & 11 \end{array}\right.$$

   Puis avec : $L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_2$

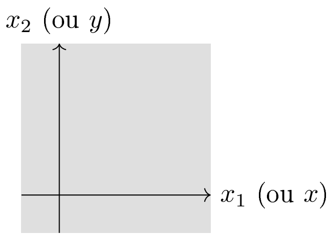
$$\left\{\begin{array}{rrcr} a & & = & 19 \\ & b & = & 11 \end{array}\right.$$

   Finalement :

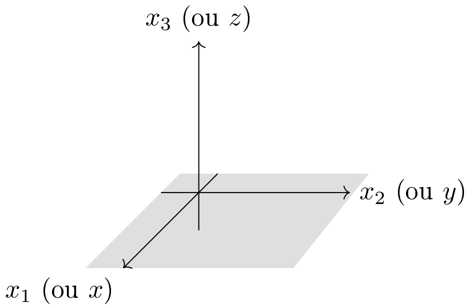
$$\boxed{\text{il n'y a qu'un seul couple de réels qui convienne } (a,b)=(19,11).}$$

II Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Nous représentons habituellement $\mathbb{R}^2$ par un repère avec axes des abscisses et axe des ordonnées :



Lorsque nous représentons $\mathbb{R}^3$ par un repère nous retrouvons le repère de $\mathbb{R}^2$:



Cela permet de conjecturer que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ contient d'autres espaces vectoriels comme $\mathbb{R}^2$.

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous dirons qu'un ensemble F est *un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$* s'il satisfait les conditions suivantes :

(i) $F \subset \mathbb{R}^n$,

(ii) F est non vide,

(iii) F est stable par combinaisons linéaires :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (\vec{x},\vec{y}) \in F^2,\ a.\vec{x} + b.\vec{y} \in F.$$

Remarques.

1. La stabilité par combinaison linéaire signifie qu'il est impossible, en utilisant des combinaisons linéaires d'éléments de F, d'obtenir un vecteur qui ne soit pas dans cet ensemble.
2. Tous les sous-espaces vectoriels contiennent à minima le vecteur nul, c'est pourquoi pour montrer la condition (ii) (F non vide) on s'assure en général que $\vec{0} \in F$.

   La contraposée sera très intéressante : si $\vec{0} \notin F$ alors F n'est pas un sous-espace vectoriel.
3. Pour s'assurer de la stabilité par combinaison linéaire il suffit de vérifier que :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall (\vec{x},\vec{y}) \in F^2,\ a.\vec{x} + \vec{y} \in F.$$

4. Ces critères sont à connaître par cœur. Nous verrons plus tard d'autre façons de vérifier qu'une partie est un sous-espace vectoriel.
5. Le sous-espace vectoriel possède des propriétés semblables à celle de $\mathbb{R}^n$.

Exemples.

1. Montrons que $F = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2r - s + 3t = 0 \right\}$ est un sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrons que $F = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ n'est pas un sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Si $\vec{0} \in F$ alors en particulier $1 = 0$ ce qui est impossible donc $0 \notin F$.

   $$\boxed{F \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel.}}$$

3. Montrons que $F = \left\{ \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   (i) Clairement $F \subset \mathbb{R}^n$.

   (ii) Si $\lambda = 0$ alors $\begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $0 \in F$.

   (iii) Soient $(x, y) \in F^2$ et $a \in \mathbb{R}$.

   Si $x \in F$ alors il existe λ_x un réel tel que : $x = \begin{pmatrix} -2\lambda_x \\ \lambda_x \\ 0 \end{pmatrix}$.

   De même si $y \in F$ alors il existe $\lambda_y \in \mathbb{R}$ tel que : $y = \begin{pmatrix} -2\lambda_y \\ \lambda_y \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Montrons que $a \cdot x + y \in F$.

$$\begin{aligned} a\cdot x+y &= \begin{pmatrix} -2\lambda_x - 2\lambda_y \\ \lambda_x + \lambda_y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2(\lambda_x + \lambda_y) \\ \lambda_x + \lambda_y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En notant $\lambda = \lambda_x + \lambda_y$ on a bien :

$$a\cdot x+y = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit $a\cdot x+y \in F$.

Nous avons établi que F est stable par combinaison linaires.

Des trois points précédents nous déduisons que

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$$

4. $F = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui correspond à $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1 - des sous-espaces particuliers.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) $\{\vec{0}\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ alors $d_{\vec{u}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{x} = \lambda.\vec{u}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ appelé *droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$*. On pourra noter cette droite vectorielle $\mathbb{R}.\vec{u}$.

III Colinéarité.

Définition 3

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $(\vec{x}, \vec{y}) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2$.

$\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont dits *colinéaires* si et seulement s'il existe une combinaison linaire $a.\vec{x} + b.\vec{y} = 0$ dont les coefficients a et b, réels, ne sont pas tous les deux nuls.

Remarques.

1. Dire qu'ils sont colinéaires c'est dire qu'il représentent la même ligne, la même direction. Autrement dit ils sont vecteurs directeurs des mêmes droites affines.
2. Dire que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires c'est die qu'il existe un nombre réel λ tel que
$$\vec{x} = \lambda.\vec{y} \quad \text{ou} \quad \vec{y} = \lambda.\vec{x}$$
La colinéarité est une sorte de proportionnalité parmi les vecteurs.

Exemples.

1. $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ est colinéaire à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ puisque, si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, alors $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}$.
2. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 24 \\ -16 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -16 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 12 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ sont colinéaires car

12	-4
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

   est un tableau de proportionnalité comme le prouve le produit en croix : $12 \times \frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-4) = 0$.
4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $a = \frac{1}{2}$ et $a = 2$. Ce qui est impossible.
5. $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -7,5 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
6. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 17 \\ 17 \\ \vdots \\ 17 \end{pmatrix}$.
8. On généralise à 3 vecteurs, ou plus, de la colinéarité mais on parle alors de vecteurs liés.
9. Les droites vectorielles sont formées de l'ensemble des vecteurs colinéaires à même vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$.

IV Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2 - Classification des sous-espaces vectorielles de $\mathbb{R}^2$.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

F vérifie l'une des trois situations qui s'excluent mutuellement :

(i) $F = \{\vec{0}\}$,

(ii) Il existe $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ tel que F soit la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$: $F = \mathbb{R}.\vec{u}$.

(iii) $F = \mathbb{R}^2$.

Démonstration

* Nous avons déjà remarqué que $\{0\}$ est un espace de $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc, en particulier, de $\mathbb{R}^2$.
* Si $F \neq \{0\}$ alors il existe $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $e \in F$.
  Comme nous l'avons déjà remarqué $\{a \cdot e \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
  Deux cas sont alors possibles.
  - Premier cas : $F = \{a \cdot e \mid a \in \mathbb{R}\}$.
  - Second cas : $F \neq \{a \cdot e \mid a \in \mathbb{R}\}$.
    Ce qui signifie qu'il existe un vecteur $f \in F$ et qui n'est pas colinéaire à e.
    Nous allons démontrer que, dans ce cas, tout vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de e et f. Ce qui établira que $\mathbb{R}^2 \subset F$.
    Notons $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ et $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.

$x = a \cdot e + b \cdot f$ avec

$$a = \frac{x_1}{e_1} - \frac{f_1}{e_1} \times \frac{e_1x_2 - x_1e_2}{f_2e_1 - f_1e_2}$$

et

$$b = \frac{e_1x_2 - x_1e_2}{f_2e_1 - f_1e_2}$$

et ces deux nombres ont du sens puisque $e \neq 0$ et e et f ne sont pas colinéaires.

■

Exemples.

1. En admettant que $F = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (u_1 - 1)(u_1 + 1) \geqslant -1 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ précisez F.

   Démontrons que $F = \mathbb{R}^2$.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ car $(1-1)(1+1) = 0 \geqslant -1$. Donc $F \neq \{0\}$.

   (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F$ car $(0-1)(0+1) = -1 \geqslant 0$.

   (c) De plus $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants puisque $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

   Ainsi F contient deux vecteurs non nuls et non colinéaires donc, nécessairement :

   $$\boxed{F = \mathbb{R}^2.}$$

V Exercices.

Exercice 1. C

Trouvez si possible des nombres a et b de sorte que les combinaisons suivantes soient nulles.

a) $a.\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} -21 \\ 14 \end{pmatrix}$.

b) $a.\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$.

c) $a.\begin{pmatrix} -16 \\ 50 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 4 \\ -25 \end{pmatrix}$.

d) $a.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. C

Trouvez si possible des nombres a et b de sorte que les égalités soient vérifiées.

a) $a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) $a \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$.

c) $a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

d) $a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. C

Dites si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On note : $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

a) $F_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2 = 0 \right\}$.

b) $F_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = 4 \right\}$.

c) $F_3 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 - x_3 = 0 \right\}$.

d) $F_4 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0 \right\}$.

e) $F_5 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = -3x_3 \text{ et } x_2 = 5x_3 \right\}$.

f) $F_6 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = -3x_3 \text{ et } x_2 = 0 \right\}$.

g) $F_7 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = -x_3 + 1 \text{ et } x_2 = x_3 \right\}$.

Exercice 4. C

Dites si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. *La présentation des ensembles est un peu différente.*

a) $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r - s = 0 \text{ et } s + t = 0 \right\}.$

b) $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$

c) $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.$

d) $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r + s + t = 1 \right\}.$

e) $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2r + 3s = 0 \right\}.$

Exercice 5. C

Dites si les vecteurs proposés sont colinéaires ou pas.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ \sqrt{\pi} + 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \pi - \sqrt{\pi} \\ \pi - 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0,4 \\ -0,1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 1,2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7,2 \\ -42 \\ 30 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. E

Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ des vecteurs éléments de $\mathbb{R}^2$.

1. Sous-espace vectoriel engendré par un vecteur. Démontrez que $E_1 = \{a.\vec{x} \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs. Démontrez que $E_2 = \left\{a.\vec{x} + b\vec{y} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.