11 Suites et comparaisons.

I Théorèmes de comparaisons.

II Croissances comparées de suites.

III Suites négligeables.

IV Suites équivalentes.

V Lien entre négligeable et équivalent.

VI Exercices.

Exercice 1. C

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \frac{\sqrt{n+1}}{n+(-1)^n}.$$

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ on a :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$

2. Déterminez les limites des suites de termes généraux :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \text{ et } \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$

3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. C

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$;

c) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n+1}}$;

d) $u_n = \dfrac{n+2(-1)^n}{n-(-1)^n}$;

e) $u_n = \dfrac{n^2+\sin(n)}{n^2+\cos(n)}$;

f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{1+2\sqrt{2n-(-1)^n}}$.

Correction de l'exercice 2

a) $-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) $-\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

d) En factorisant par n et en utilisant le a) : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

e) En factorisant par n^2 : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

f) En factorisant par $\sqrt{n}$ et en utilisant le théorème des gendarmes pour la limite du dénominateur pour ne pas utiliser de passage à la limite dans la fonction.

Exercice 3. C

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}.$$

Montrez que (u_n) converge et précisez sa limite.

Correction de l'exercice 3

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + n} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Exercice 4. C

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n + (-1)^n$;

b) $u_n = n^2 - \sin(n)$;

c) $u_n = \sin\left(\sqrt{2 - \cos^3\left(1 + n^2 - n^n\right)}\right) - n$.

Correction de l'exercice 4

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $n-1 \leqslant u_n$ or $n-1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $n^2-1 \leqslant u_n$ or $n^2-1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n \leqslant 1-n$ or $-n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.}$$

Exercice 5. C

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

- (v_n) est bornée,
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démontrez que $(u_n + v_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6. C

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) (Démonstration par récurrence : pour ceux l'ayant déjà étudiée.) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.

Correction de l'exercice 6

1. $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ donc strictement croissante.
2. (a) Par récurrence.
   Remarquons que dans ce cas nous aurions du mal à définir une fonction f telle que $u_{n+1} = u_n$.
   Clairement : $n^2 + 2n + 3 > n^2$.
   (b) $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_n > n^2$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. $u_n = (n+1)^2$.

Exercice 7. C

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| < \sqrt{n} + \dfrac{1}{n}$.
Montrez que $u_n = o(n)$.

Correction de l'exercice 7

$\sqrt{n}+\frac{1}{n}=o\left(\sqrt{n}\right)$ donc $\sqrt{n}+\frac{1}{n}\sim\sqrt{n}$.

D'où, par quotient, $\frac{\sqrt{n}+\frac{1}{n}}{n}\sim\frac{\sqrt{n}}{n}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\frac{u_n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Finalement

$$\boxed{u_n=o(n).}$$

Exercice 8. C

Justifiez que $n^2+1=o(2^n)$.

Correction de l'exercice 8

$\frac{n^2}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ par croissance comparée donc $n^2=o(2^n)$.

$\frac{1}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $1=o(2^n)$.

En sommant

$$\boxed{n^2+1=o(2^n).}$$

Exercice 9. C

Soit $a\in\mathbb{R}^*$. Déterminez un équivalent de $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$.

Correction de l'exercice 9

$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right)$.

puisque $\frac{a}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$: $\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\sim\frac{a}{n}$.

D'où par produit : $n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\sim a$.

Pour conclure il faut utiliser un résultat de lycée que nous n'avons pas encore revu : par continuité de la fonction exponentielle : $\exp(x)\xrightarrow[x\to a]{}\exp(a)$.

$$\boxed{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\sim \mathrm{e}^a.}$$

Exercice 10. C

Donnez un équivalent simple et la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}-1}{\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)}$

Correction de l'exercice 10

Puisque $-\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: $\mathrm{e}^{-1/n} - 1 \sim -\frac{1}{n}$.

Puisque $-\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$.

Par quotient : $\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} - 1}{\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)} \sim \frac{-\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n^2}}$.

$$\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} - 1}{\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)} \sim n \text{ et donc } \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} - 1}{\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Exercice 11. C

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite positive vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2(2n+1)}{\pi} \leqslant u_n^2 \leqslant \frac{(2n+1)^2}{n\pi}.$$

Déterminez un équivalent de u_n.

Correction de l'exercice 11

$\frac{2(2n+1)}{\pi} \sim \frac{4}{\pi}n$ et $\frac{(2n+1)^2}{n\pi} \sim \frac{4}{\pi}n$ donc

$$\boxed{u_n \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.}$$

Exercice 12.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n^2 \ln\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$.

Déterminez la limite de (u_n).

Correction de l'exercice 12

$2n^2 \ln\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right) = -2n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim -2$.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2.}$$

Exercice 13. C

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$.

Déterminez la limite de (u_n).

Exercice 14. C

Déterminez un équivalent de la suite de terme général $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 15. C

Donnez un équivalent simple en $+\infty$ des suites dont on donne le terme général.

a) $u_n = \frac{(3n+12)(2n+5)}{(2n+2022)(3n^2+7n-14)}$.

b) $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

c) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.

d) $u_n = 3^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

e) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$.

f) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$.

g) $u_n = \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n}$.

h) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

i) $u_n = \ln(1+n) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

j) $u_n = \sin(n^2+1) - \sqrt{n}$.

k) $u_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} - \ln(n)$.

l) $u_n = n^2 + n - \ln(n^3 + n)$.

m) $u_n = \mathrm{Arctan}(n^2 - n) + \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

n) $u_n \sin\left(\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$.

Correction de l'exercice 15

a) Équivalents polynômes et produits quotients : $u_n \sim \frac{1}{n}$.

b) $\frac{\pi}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et équivalent de référence : $u_n \sim \frac{\pi}{2n}$.

c) $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $u_n \sim \frac{1}{n}$.

d) $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et équivalent de référence : $u_n \sim 3^n \times \frac{1}{2^n} \sim \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

e) On peut se ramener à une situation produit quotient : $u_n = -\frac{1}{n(n-1)}$ donc $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$.

f) $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$.

g) $\mathrm{e}^{-2n} = o\left(\mathrm{e}^{-n}\right)$ donc $u_n \sim \mathrm{e}^{-n}$.

h) $\frac{1}{n} = o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

i) $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et équivalent de référence $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(\ln(n))$ donc $\ln(n+1) \sim \ln(n)$. Puis par produit $u_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

j) $\sin(n^2+1)$ est bornée et $-\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $u_n = -\sqrt{n} + o(-\sqrt{n})$. Autrement dit $u_n \sim -\sqrt{n}$.

k) $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \sim n$ donc $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = n + o(n)$. D'où $u_n = n + o(n) - \ln(n) = n + o(n)$. $u_n \sim n$.

l) $u_n = n^2 + n - 3\ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Donc $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'où $u_n = n^2 + n + o(n^2) \sim n^2$

Exercice 16. C

1. Montrez que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

2. Déduisez-en un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Exercice 17. C

Trouvez un équivalent simple de la suite définie par $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Exercice 18. C

Trouvez un équivalent simple de

$$u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}.$$

Exercice 19. C