11 Suites et comparaisons.

I Théorèmes de comparaisons.

Proposition 1 - Théorème d'encadrement.

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles,

. $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Remarques.

1. C'est une propriété asymptotique : elle reste valable si l'encadrement n'est vérifié qu'à partir d'un certain rang.

Proposition 2 - Passage à la limite dans des inégalités.

Soient :

. $a, b \in \mathbb{R}$,

. $\ell \in \mathbb{R}$,

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers ℓ.

(i) $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant b) \Rightarrow (\ell \leqslant b)$.

(ii) $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a) \Rightarrow (\ell \geqslant a)$.

(iii) $(\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant u_n \leqslant b) \Rightarrow (a \leqslant \ell \leqslant b)$.

Remarques.

1. Ce résultat signifie que l'on peut passer à la limite dans une inégalité large.
2. Ce n'est pas vrai avec des inégalités strictes en général : $\frac{1}{n} > 0$ et pourtant $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Il s'agit d'une propriété asymptotique, autrement dit on pourrait se contenter d'un majorant ou d'un minorant à partir d'un certain rang.
4. En particulier on retrouve que toute suite convergente est bornée.

Proposition 3

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

$$\text{(i)} \quad \left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \left(v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right).$$

$$\text{(ii)} \quad \left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \\ v_n \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \left(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty\right).$$

II Croissances comparées de suites.

Théorème 1 Croissances comparées.

Soient :

. $a > 0$, $b > 0$ et $q > 0$ des réels.

$$\text{(i)} \quad \frac{(\ln(n))^b}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\text{(ii)} \quad (q \in]1, +\infty[) \Rightarrow \left(\frac{n^a}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right).$$

$$\text{(iii)} \quad (q \in]0; 1[) \Rightarrow \left(n^a q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right).$$

$$\text{(iv)} \quad \frac{q^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\text{(v)} \quad \frac{n!}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemples.

1. $\dfrac{n^2}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
2. $n^{-2}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
3. $\dfrac{3^n + n^2}{n! + 1}.$

III Suites négligeables.

Dans ce chapitre et le suivant on considère des suites toutes non nulles à partir d'un certain rang.

Définition 1

Nous dirons que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Dans ce cas nous écrirons $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et on dit que « u_n est un petit o de v_n ».

Exemples.

1. Pour $0 < \alpha < \beta$, $n^\alpha = o\left(n^\beta\right)$ et $\frac{1}{n^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.
2. Nous retrouvons les résultats de puissances comparées pour α et β des réels positifs et $q > 1$:
   $(\ln(n))^\beta = o(n^\alpha)$, $n^\alpha = o(q^n)$, $q^n = o(n!)$ et $n! = o(n^n)$.
   Et avec les inverses pour α et β des réels positifs et $|q| < 1$: :
   $\frac{1}{n^n} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$, $\frac{1}{n!} = o(q^n)$, $q^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{(\ln(n))^\beta}\right)$.
3. Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
4. Dire que $u_n = o(1)$ signifie $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarques.

1. Il s'agit d'un outil de comparaison asymptotique. Il permet de comparer la vitesse de convergence de deux suites. Si $u_n = o(v_n)$ alors (v_n) l'emporte sur (u_n) au voisinage de $+\infty$.
2. Nos avons obtenu une échelle des croissances comparées : ?
3. Nous écrirons souvent : $u_n = v_n + o(w_n)$ ce que nous interpréterons en disant que u_n et v_n différent par une suite qui est négligeable devant (w_n).

Proposition 4 - Des propriétés en vrac.

- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant u_n \leqslant b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ alors $u_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n \times w_n = o(u_n \times w_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(r_n)$ alors $u_n \times w_n = o(v_n \times r_n)$.

2

IV Suites équivalentes.

Définition 2

Nous dirons que (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* si $\frac{u_n}{v_n} \underset{\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Dans ce cas nous écrirons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Exemples.

1. $n + \frac{1}{n} \sim n$.
2. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n}$.
3. $\frac{4n^3+2}{n^2+7n} \sim 4$.

Remarques.

1. Une suite ne peut être équivalente à 0, ça n'a pas de sens.

Proposition 5 - Des équivalents de référence.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

- $\sin(u_n) \sim u_n$.
- $\tan(u_n) \sim u_n$.
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.
- $\mathrm{Arctan}(u_n) \sim u_n$.
- $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$.
- $\cos(u_n) \sim 1$.
- $\sqrt{1 + u_n} - 1 \sim \frac{u_n}{2}$.
- $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$.

Exemples.

1. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.
2. $-2n^4 + 3n^2 + 8n \sim -2n^4$. Une suite polynomiale équivaut a son monôme de plus haut degré.
3. Nous déduisons de l'exemple précédent, pour une expression rationnelle : $\frac{2n^3+n+1}{-5n^7+3n^4} \sim \frac{2n^3}{-5n^7} \sim -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{n^2}$
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^n + n^2 \sim n^2$.
5. $3n \not\sim n$.

Proposition 6 - Des propriétés de l'équivalence.

- Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n = o(u_n)$ alors $w_n = o(v_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors (u_n) et (v_n) sont du même du signe à partir d'un certain rang.
- Si $u_n \sim v_n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \sim \ell$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $u_n \sim v_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim r_n$ alors $u_n \times w_n \sim v_n \times r_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim r_n$ alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{r_n}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n \sim v_n$ alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.
- Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $u_n \sim w_n$ alors $v_n \sim u_n \sim w_n$.

Exemples.

1. $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}$ et $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \sim \frac{1}{2^n\sqrt{n}}$ et $\frac{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1} \sim \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.
2. $n + \frac{1}{n} \sim n$ et $-n + \frac{1}{n^2} \sim -n$ mais il n'y a pas équivalence entre $n + \frac{1}{n} - n + \frac{1}{n^2}$ et $n - n$.
3. $n + 1 \sim n$ mais e^{n+1} n'est as équivalent à e^n.
4. $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ n'est pas équivalent à 1.

Remarques.

1. Il n'est pas possible d'ajouter membre à membre des équivalents.
2. Il n'est pas possible de composer des équivalents par une fonction.
3. Il n'est pas possible d'élever un équivalent à une puissance variable.

V Lien entre négligeable et équivalent.

Théorème 2

$u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$, ou encore si et seulement si $u_n - v_n = o(u_n)$.

Remarques.

1. Ne pouvant sommer des équivalents nous passerons par le petit o pour gérer cette situation : si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = v_n + o(v_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n + v_n \sim v_n$.

VI Exercices.

Exercice 1. C

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \frac{\sqrt{n+1}}{n + (-1)^n}.$$

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ on a :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$

2. Déterminez les limites des suites de termes généraux :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \text{ et } \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$

3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. C

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$;

c) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n+1}}$;

d) $u_n = \dfrac{n + 2(-1)^n}{n - (-1)^n}$;

e) $u_n = \dfrac{n^2 + \sin(n)}{n^2 + \cos(n)}$;

f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{1 + 2\sqrt{2n - (-1)^n}}$.

Exercice 3. C

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}.$$

Montrez que (u_n) converge et précisez sa limite.

Exercice 4. C

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n + (-1)^n$;

b) $u_n = n^2 - \sin(n)$;

c) $u_n = \sin\left(\sqrt{2 - \cos^3\left(1 + n^2 - n^n\right)}\right) - n$.

Exercice 5. C

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

- (v_n) est bornée,
- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Démontrez que $(u_n + v_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6. C

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) (Démonstration par récurrence : pour ceux l'ayant déjà étudiée.) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 7. C

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| < \sqrt{n} + \dfrac{1}{n}$.
Montrez que $u_n = o(n)$.

Exercice 8. C

Justifiez que $n^2 + 1 = o(2^n)$.

Exercice 9. C

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminez un équivalent de $\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$.

Exercice 10. C

Donnez un équivalent simple et la limite de $\dfrac{e^{-\frac{1}{n}}-1}{\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)}$

Exercice 11. C

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite positive vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{2(2n+1)}{\pi}\leqslant u_n^2\leqslant\frac{(2n+1)^2}{n\pi}.$$

Déterminez un équivalent de u_n.

Exercice 12.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2n^2\ln\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$.
Déterminez la limite de (u_n).

Exercice 13. C

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n^2}}$.

Déterminez la limite de (u_n).

Exercice 14. C

Déterminez un équivalent de la suite de terme général $u_n=\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 15. C

Donnez un équivalent simple en $+\infty$ des suites dont on donne le terme général.

a) $u_n=\frac{(3n+12)(2n+5)}{(2n+2022)(3n^2+7n-14)}$.

b) $u_n=\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

c) $u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$.

d) $u_n=3^n\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

e) $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}$.

f) $u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}$.

g) $u_n=e^{-n}+e^{-2n}$.

h) $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$.

i) $u_n=\ln(1+n)\times\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

j) $u_n=\sin(n^2+1)-\sqrt{n}$.

k) $u_n=\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}-\ln(n)$.

l) $u_n=n^2+n-\ln(n^3+n)$.

m) $u_n\sin\left(\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$.

n)

Exercice 16. C

1. Montrez que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

2. Déduisez-en un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Exercice 17. C

Trouvez un équivalent simple de la suite définie par $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Exercice 18. C

Trouvez un équivalent simple de

$$u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}.$$

Exercice 19. C