10 Applications.

I Généralités.

1 Définition.

2 Image d'un ensemble et image réciproque d'un ensemble.

3 Composition.

4 Restriction.

II Injection, surjection, bijection.

1 Application injective.

2 Applications surjectives.

3 Application bijective.

III Exercices.

Exercice 1. A

En vous appuyant sur le tableau de variation de f déterminez les images et images réciproques d'ensembles proposées.

1.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
f	1	↗	100	↘	50	↗	$+\infty$

a) $f([1;4])$. b) $f([1,+\infty[)$. c) $f(]-\infty,4])$.

d) $f^{-1}(]1;+\infty[)$. e) $f^{-1}([1;+\infty[)$. f) $f^{-1}([50;100])$.

2.

x	-2		-1		1		2
f	1	↗	2	↘	-3	↗	1

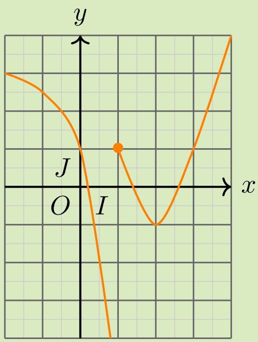
a) $f([1;2])$. b) $f([-1;2])$. c) $f([-2;1])$.

d) $f^{-1}([-3;2])$. e) $f^{-1}(\{1\})$. f) $f^{-1}([-3;1])$.

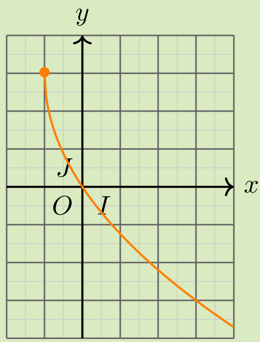
Exercice 2. B

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dites si f et une application sinon donnez une restriction de f qui soit une application.

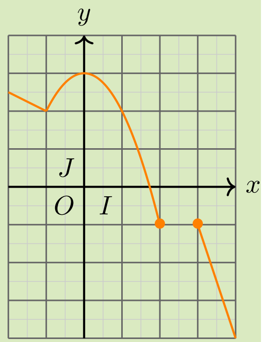
a)



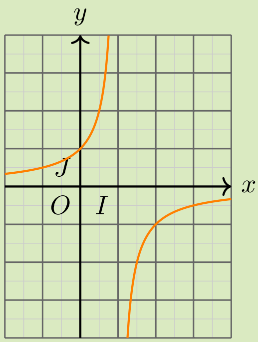
b)



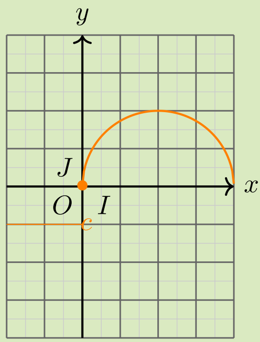
c)



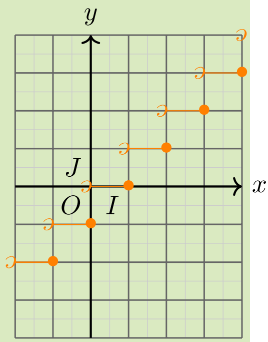
d)



e)



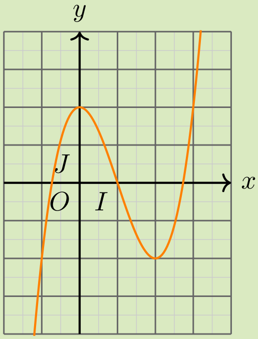
f)



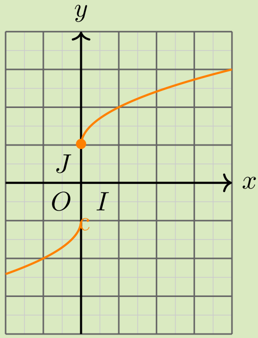
Exercice 3. B

On a dessiné ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.
Dites s'il s'agit d'un fonction injective, surjective, bijective ou autre.
Proposez une restriction de f qui soit bijective en précisant l'ensemble d'arrivée considéré.

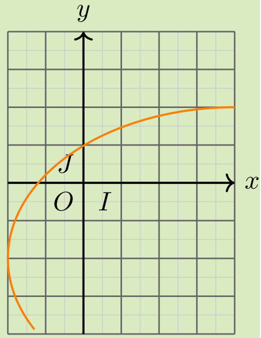
a)



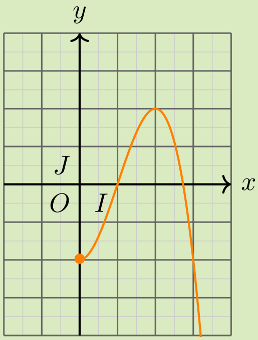
b)



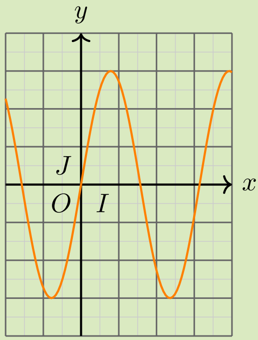
c)



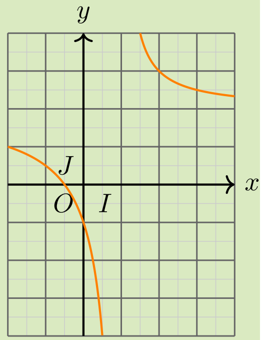
d)



e)



f)



Exercice 4. C

Donnez une expression algébrique des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les cas suivants.

a) $f(x) = -4x$ et $g(x) = 6x$.

b) $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = -x + 1$.

c) $f(x) = -3x^2 + x + 1$ et $g(x) = -x + 1$.

d) $f(x) = x^3$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

e) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = (x+1)^2$.

f) $f(x) = \ln(x) - 1$ et $g(x) = \mathrm{e}^{x+1}$.

g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $g(x) = x^3 \ln(x)$.

h) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$ et $g(x) = x^2 - 3$.

Exercice 5. C

Déterminez le domaine de définition de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans les cas suivants.

a) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

b) $f(x) = \ln(x^2)$.

c) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$.

d) $f(x) = \ln(-x+1)$.

e) $f(x) = \dfrac{3}{2x-7}$.

f) $f(x) = \dfrac{x + \ln(x)}{(2x-3)(5-x)}$.

g) $f(x) = \sqrt{8x+1}$.

h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\frac{1}{3}x - \frac{5}{7}}\right)$.

i) $f(x) = \ln\left((3x+1)(4x-2)\right)$.

j) $f(x) = \ln\left(\dfrac{7x-6}{5-3x}\right)$.

k) $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$.

l) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$.

m) $f(x) = \ln\left(|x|\right)$.

n) $f(x) = \ln\left(x^2 - 7x + 10\right)$.

Exercice 6.

Déterminez si l'application $f : E \to F$ est bijective, et, si oui déterminez sa fonction réciproque.

a) $f(x) = -5x + 2$, $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 7$, $E = [0; 1]$ et $F = \left[-7; -\frac{19}{7}\right]$.

c) $f(x) = -3(x - 2)(4x - 1)$, $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$.

Exercice 7. D

Montrez que l'application $f : E^n \to E^n$ définie par $f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1)$ est bijective en exhibant sa fonction réciproque.

Exercice 8. D

On considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ définie par $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$. Déterminez $f \circ f$ puis déduisez-en que f est bijective.

Exercice 9. E

Soient E, F et G des ensembles, $f : E \to G$ et $g : F \to G$ des applications.

1. Montrez que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Montrez que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
3. Déduisez-en la proposition 2.

Exercice 10. E

La restriction d'une surjection est-elle encore une surjection ? Même chose pour une injection.

Exercice 11. E

La composée de deux applications surjectives est-elle surjective ? Même chose pour une injection.