10 Applications.

I Généralités.

1 Définition.

On dit d'une fonction que c'est une *application* si son ensemble de départ coïncide avec son domaine de définition.

Ainsi la fonction $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{x}\end{array}\right.$ n'est pas une application car elle n'est pas définie en 0 par contre $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{x}\end{array}\right.$ est une application.

2 Image d'un ensemble et image réciproque d'un ensemble.

Soient E et F des ensembles, $f : E \to F$ une application.

On appelle image de $A \subset E$ par f l'ensemble

$$f(A) := \{y \in F \mid \exists x \in A,\ f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

On appelle image réciproque de $B \subset F$ par f l'ensemble

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

3 Composition.

À partir de deux applications f et g il est parfois possible d'en créer une troisième appelée la *composée de f par g* et notée $g \circ f$ par : $x \mapsto g(f(x))$. Autrement dit on considère l'image par f puis l'image (de l'image) par g. On schématise parfois :

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} g \circ f(x).$$

Ainsi, si $f : x \mapsto x - 1$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, alors $g \circ f(x) = \sqrt{x-1}$.

Si $f : E \to F$ et $g : H \to G$ sont deux applications, pour $g \circ f$ soit une application il faut que $f(E) \subset H$.

La composition est une opération entre applications qui est associative. Si f, g et h sont des applications : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$.

L'application identité est un élément neutre pour la composition. Si $f : E \to F$ alors $f \circ Id_E = Id_F \circ f = f$.

4 Restriction.

Dans diverses situations nous serons amenés à choisir un ensemble de départ plus petit pour une fonction. Ainsi $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x-1} \end{array} \right.$ n'est pas une application mais *sa restriction à* $[1, +\infty[$, notée $\varphi|_{[1,+\infty[}$. est

II Injection, surjection, bijection.

1 Application injective.

Une application $f : E \to F$ est dite *injective* si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ \ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Ceci revient à dire que chaque élément image par la fonction n'a qu'un antécédent.

Exemples.

1. Diagrammes sagittaux.
2. Injectivité des fonctions de références à partir de leur courbe représentative.
3. Démonstration du fait que la fonction carré n'est pas injective. Quelle restriction de la fonction carré pourrait être injective ?
4. Démonstration du fait que la fonction $f : x \mapsto 3x - 7$ est injective.

2 Applications surjectives.

Une application $f : E \to F$ est dite *surjective* si et seulement si :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ \ f(x) = y.$$

Ceci revient à dire que tous les éléments de l'ensemble d'arrivée F sont des images par la fonction f ou encore $f(E) = F$.

Exemples.

1. Diagrammes sagittaux.
2. Surjectivité des fonctions de références à partir de leur courbe représentative.
3. Démonstration du fait que la fonction carré n'est pas surjective. Comment modifier la fonction carré pour qu'elle soit surjective ?
4. Démonstration du fait que la fonction $f : x \mapsto 3x - 7$ est surjective.

Proposition 1

Toute application $f : E \to F$ est surjective sur $f(E)$.

3 Application bijective.

Nous dirons qu'une application est *bijective* si et seulement si elles à la fois injective et surjective.

Exemples.

1. Diagrammes sagittaux.
2. Permutation.
3. Fonctions de référence et bijections. La symétrie sur la courbe représentative.
4. Fonctions carré et racines carrées sont-elle réciproques l'une de l'autre ?
5. La fonction inverse, une fonction involutive. L'identité.

Proposition 2

Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement il existe une application $g : F \to E$ telle que : $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.
Dans ce cas on dit que g est *la fonction réciproque* de f et on la note f^{-1}.

Si une application admet une réciproque alors cette réciproque est unique.

La composée de deux bijections est encore une bijection.

Proposition 3

$f : E \to F$ est bijective si et seulement si

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y.$$

Proposition 4

Si $f : E \to F$, une application, est injective, alors f réalise une bijection de E sur $f(E)$.

Proposition 5

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une application.

Si f est strictement monotone alors f est bijective de E sur $f(E)$.

Rappelons tout de suite un résultat de terminale permettant de démontrer qu'une fonction est bijective (qui est lié au théorème des valeurs intermédiaires) : le théorème de la bijection.

III Exercices.

Exercice 1. A

En vous appuyant sur le tableau de variation de f déterminez les images et images réciproques d'ensembles proposées.

1.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	100	$\searrow$	50	$\nearrow$	$+\infty$

a) $f([1;4])$.
b) $f([1,+\infty[)$.
c) $f(]-\infty,4])$.
d) $f^{-1}(]1;+\infty[)$.
e) $f^{-1}([1;+\infty[)$.
f) $f^{-1}([50;100])$.

2.

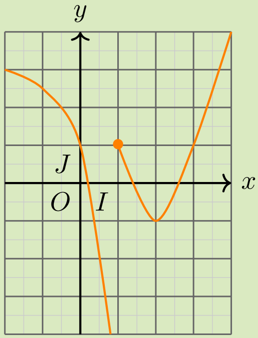
x	-2		-1		1		2
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

a) $f([1;2])$.
b) $f([-1;2])$.
c) $f([-2;1])$.
d) $f^{-1}([-3;2])$.
e) $f^{-1}(\{1\})$.
f) $f^{-1}([-3;1])$.

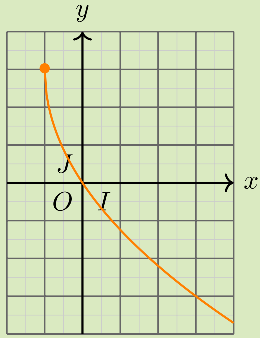
Exercice 2. B

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dites si f et une application sinon donnez une restriction de f qui soit une application.

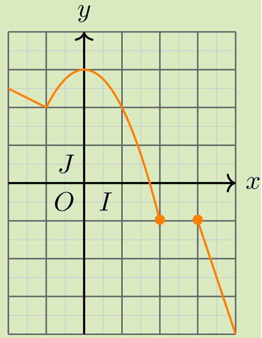
a)



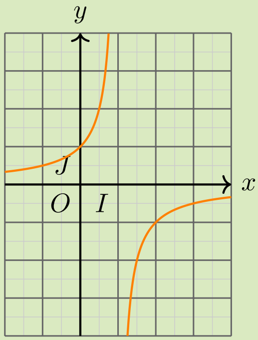
b)



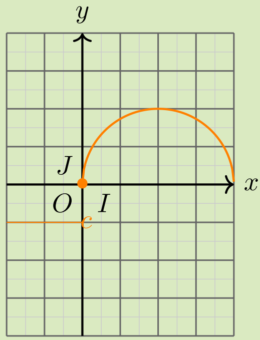
c)



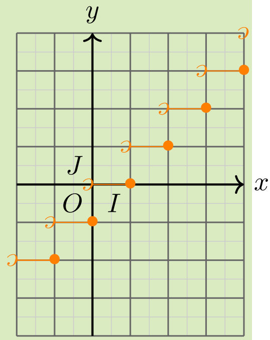
d)



e)



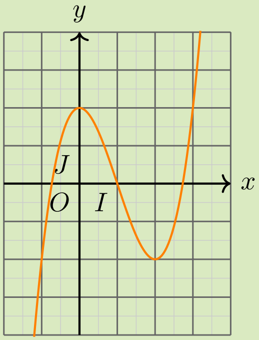
f)



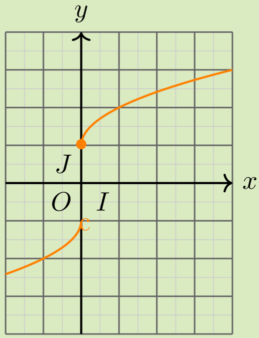
Exercice 3. B

On a dessiné ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.
Dites s'il s'agit d'un fonction injective, surjective, bijective ou autre.
Proposez une restriction de f qui soit bijective en précisant l'ensemble d'arrivée considéré.

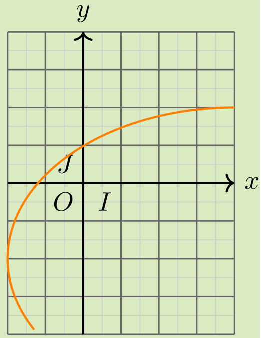
a)



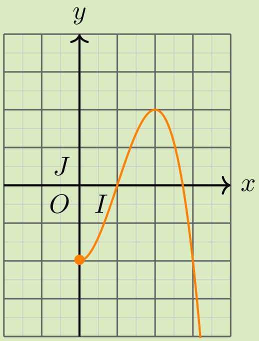
b)



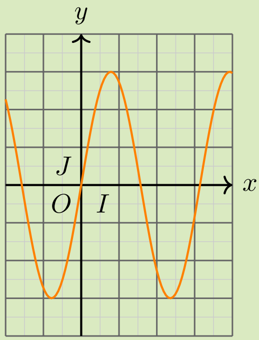
c)



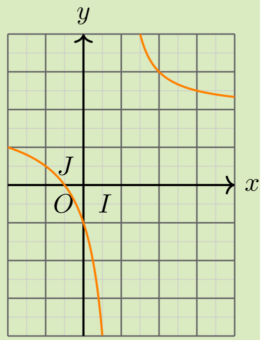
d)



e)



f)



Exercice 4. C

Donnez une expression algébrique des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les cas suivants.

a) $f(x) = -4x$ et $g(x) = 6x$.

b) $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = -x + 1$.

c) $f(x) = -3x^2 + x + 1$ et $g(x) = -x + 1$.

d) $f(x) = x^3$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

e) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = (x+1)^2$.

f) $f(x) = \ln(x) - 1$ et $g(x) = \mathrm{e}^{x+1}$.

g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $g(x) = x^3 \ln(x)$.

h) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$ et $g(x) = x^2 - 3$.

Exercice 5. C

Déterminez le domaine de définition de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans les cas suivants.

a) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

b) $f(x) = \ln(x^2)$.

c) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$.

d) $f(x) = \ln(-x+1)$.

e) $f(x) = \dfrac{3}{2x-7}$.

f) $f(x) = \dfrac{x + \ln(x)}{(2x-3)(5-x)}$.

g) $f(x) = \sqrt{8x+1}$.

h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\frac{1}{3}x - \frac{5}{7}}\right)$.

i) $f(x) = \ln\left((3x+1)(4x-2)\right)$.

j) $f(x) = \ln\left(\dfrac{7x-6}{5-3x}\right)$.

k) $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$.

l) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$.

m) $f(x) = \ln\left(|x|\right)$.

n) $f(x) = \ln\left(x^2 - 7x + 10\right)$.

Exercice 6.
Déterminez si l'application $f : E \to F$ est bijective, et, si oui déterminez sa fonction réciproque.

a) $f(x) = -5x + 2$, $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 7$, $E = [0; 1]$ et $F = \left[-7; -\frac{19}{7}\right]$.

c) $f(x) = -3(x - 2)(4x - 1)$, $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$.

Exercice 7. D
Montrez que l'application $f : E^n \to E^n$ définie par $f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1)$ est bijective en exhibant sa fonction réciproque.

Exercice 8. D
On considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ définie par $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$. Déterminez $f \circ f$ puis déduisez-en que f est bijective.

Exercice 9. E
Soient E, F et G des ensembles, $f : E \to G$ et $g : F \to G$ des applications.

1. Montrez que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Montrez que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
3. Déduisez-en la proposition 2.

Exercice 10. E
La restriction d'une surjection est-elle encore une surjection ? Même chose pour une injection.

Exercice 11. E
La composée de deux applications surjectives est-elle surjective ? Même chose pour une injection.