

## 09 Probabilités.

### I Définition axiomatique.

### II Propriétés.

### III Exercices.

#### Exercice 1. A

On lance un dé pipé. La distribution de probabilité est donnée par le tableau suivant.

$F$ (face)	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(F)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	?

1. Calculer  $\mathbb{P}(\{6\})$ .
2. Calculer la probabilité des événements suivants.
  - (a) « La face obtenue est paire » ;
  - (b) « la face obtenue est supérieur ou égale à 5 ».

#### Correction de l'exercice 1

1. Calculons  $\mathbb{P}(6)$ .

La probabilité de l'univers est 1.

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

équivalait successivement à :

$$\mathbb{P}(\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}) = 1$$

la probabilité d'un événement égalant la somme des probabilités des issues qui le réalise :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) &= 1 \\ 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,3 + \mathbb{P}(\{6\}) &= 1 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation linéaire :

$$\mathbb{P}(\{6\}) = 1 - 0,9$$

$$\mathbb{P}(\{6\}) = 0,1.$$

2. (a) Notons  $A$  : « la face obtenue est paire ».

Calculons  $\mathbb{P}(A)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{2; 4; 6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= 0,1 + 0,2 + 0,1\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(A) = 0,4.$$

3.  $B$  : « la face obtenue est supérieure ou égale à 5 ».

Calculons  $\mathbb{P}(B)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\{5; 6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= 0,3 + 0,1\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(B) = 0,4.$$

### Exercice 2. A

Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone. On considère les événements :

- $O_1$  : « La 1<sup>er</sup> ligne est occupée ».
- $O_2$  : « La 2<sup>e</sup> ligne est occupée ».

Une étude statistique montre que :

- $p(O_1) = 0,4$
- $p(O_2) = 0,3$
- $p(O_1 \cap O_2) = 0,2$

Calculer la probabilité des événements suivants.

1. « La ligne 1 est libre ».
2. « Au moins une des lignes est occupée ».
3. « Au moins une des lignes est libre ».

### Correction de l'exercice 2

1. Il s'agit ici d'interpréter les événements proposés avec ceux donnés dans l'énoncé.

Calculons  $\mathbb{P}(\overline{O_1})$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{O_1}) &= 1 - \mathbb{P}(O_1) \\ &= 1 - 0,4\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\overline{O_1}) = 0,6.$$

2. L'expression « Au moins l'une » peut s'exprimer en utilisant la conjonction « ou » et par conséquent par l'union.

Calculons  $\mathbb{P}(O_1 \cup O_2)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(O_1 \cup O_2) &= \mathbb{P}(O_1) + \mathbb{P}(O_2) - \mathbb{P}(O_1 \cap O_2) \\ &= 0,4 + 0,3 - 0,2\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(O_1 \cup O_2) = 0,5.$$

3. Cette question est nettement moins facile. En réfléchissant comme à la question précédente :

Calculons  $\mathbb{P}(\overline{O_1} \cup \overline{O_2})$ .

$$\mathbb{P}(\overline{O_1} \cup \overline{O_2}) = \mathbb{P}(\overline{O_1}) + \mathbb{P}(\overline{O_2}) - \mathbb{P}(\overline{O_1} \cap \overline{O_2})$$

$\overline{O_1} \cap \overline{O_2}$  signifie « la première ligne est libre et la seconde aussi ». Nous n'avons pas la possibilité de calculer directement la probabilité de cet événement. L'événement contraire peut s'exprimer par : « la première ligne est occupée ou la seconde est occupée », autrement dit « au moins une des deux lignes est occupée ». Donc :

$$\begin{aligned}&= 1 - \mathbb{P}(O_1) + 1 - \mathbb{P}(O_2) - \mathbb{P}(\overline{O_1 \cup O_2}) \\ &= 1 - 0,4 + 1 - 0,3 - [1 - \mathbb{P}(O_1 \cup O_2)] \\ &= 1,3 - [1 - 0,5]\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\overline{O_1} \cup \overline{O_2}) = 0,8.$$

La dernière question de l'exercice introduit et correspond aux lois de De Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

### Exercice 3. A

Un jeu consiste à lancer deux dés cubiques parfaitement équilibrés numérotés de 1 à 6.

1. Donnez sous forme d'un tableau l'univers associé à cette expérience.
2. Calculez la probabilité d'obtenir 6 sur les deux dés.
3. On note  $A$  : « La somme des nombres obtenus égale 3 ». Calculez la probabilité de l'événement  $A$ .
4. On note  $B$  : « le produit des nombres obtenus égale 6 ». Calculez la probabilité de l'événement  $B$ .
5. On note  $C$  : « le produit des nombres obtenus égale 7 ». Calculez la probabilité de l'événement  $C$ .
6. On note  $D$  : « la somme des nombres obtenus est strictement supérieure à 3 ». Calculez la probabilité de l'événement  $D$ .

### Correction de l'exercice 3

1. Lorsque les résultats d'une expérience aléatoire comme ici sont formés de deux données (un nombre pour chaque dé) il est souvent intéressant de représenter l'expérience par un tableau double-entrée comme ci-dessous.

Cependant les arbres probabilistes peuvent aussi être utilisés et permettent de représenter davantage de situations que le tableau double-entrée.

	1	2	3	4	5	6
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
6	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)

Ainsi l'univers est formé de 36 couples correspondant aux résultats obtenus sur les deux dés.

2. L'événement dont il est question n'ayant pas de nom nous allons lui en donner un. Notons  $E$  : « obtenir 6 sur les deux dés ».

Calculons  $\mathbb{P}(E)$ .

$$E = \{(6; 6)\}.$$

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et  $E$  est réalisé par une issue donc

$$P(E) = \frac{1}{36}.$$

3. Déterminons les sommes associées à chaque issue sous forme d'un tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Calculons  $\mathbb{P}(A)$ .

$$A = \{(1; 2), (2; 1)\}.$$

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et  $A$  est réalisé par 2 issues donc  $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{36}$ .

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{18}.$$

Pour cette question nous aurions pu choisir une modélisation alternative.

En choisissant comme issue la somme des nombres sur les deux faces nous obtenons comme univers :  $\Omega = \{2; 3; 4; \dots; 11; 12\}$ . Et la loi de probabilité correspondante est alors :

Issues	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Proba	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarquons tout de même que pour faire cette modélisation nous avons en fait utilisé de façon implicite l'équiprobabilité de la précédente modélisation.

4. Déterminons les sommes associées à chaque issue sous forme d'un tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Calculons  $\mathbb{P}(B)$ .

$$B = \{(1; 6), (2; 3), (3; 2), (6; 1)\}.$$

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et  $B$  est réalisé par 4 issues donc  $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{36}$ .

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{9}.$$

5. Calculons  $\mathbb{P}(C)$ .

$$C = \emptyset.$$

Peu importe la loi de probabilité dans ce cas puisqu'il s'agit d'un événement impossible :

$$\mathbb{P}(C) = 0.$$

6. Calculons  $\mathbb{P}(D)$ .

L'événement  $D$  rassemblant de nombreuses issues nous préférons (mais ce n'est pas une obligation) considérer un événement contraire.

$\overline{D}$  : « la somme est inférieure (ou égale) à 3 » donc :  $\overline{D} = \{(1; 1)\}$ .

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et  $\overline{D}$  est réalisé par 1 issues donc  $\mathbb{P}(\overline{D}) = \frac{1}{36}$ .

$$\text{Donc : } \mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(\overline{D}) = 1 - \frac{1}{36}.$$

$$\mathbb{P}(D) = \frac{35}{36}.$$

#### Exercice 4. A

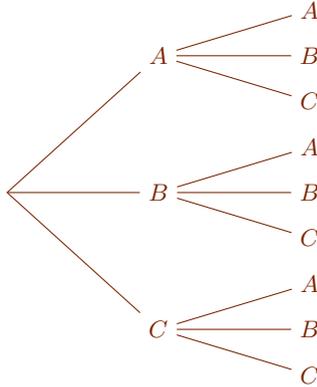
Un square est équipé de trois bancs. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. L'objet de l'exercice est de déterminer la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte.

Les trois bancs sont notés  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

1. Représentez la situation par un arbre.
2. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient sur le banc  $A$ .
3. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient côte à côte.

#### Correction de l'exercice 4

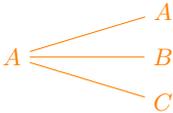
1.



Ainsi  $\Omega = \{AA; AB; AC; BA; BB; BC; CA; CB; CC\}$ .

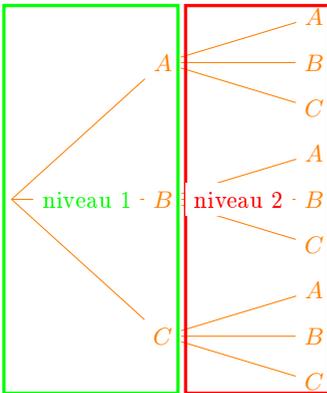
Un peu de vocabulaire sur les arbres.

- Les lettres sont appelés des *nœuds* : ici  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des nœuds. Le premier nœud n'est pas désigné par une lettre et est appelé la racine de l'arbre.
- Les segments qui relient deux nœuds sont appelés des *branches* :  $A \text{ ————— } B$  est une branche.
- Un embranchement est formé d'un nœud et des branches qui en partent :

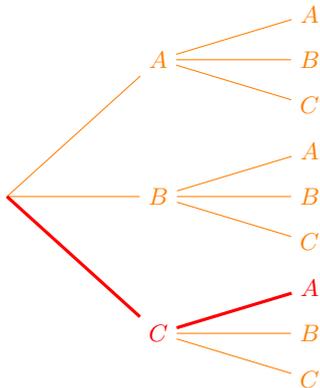


est un embranchement.

- Un *niveau* est formé de tous les embranchements qui sont également éloignés de la racine :



- Un *chemin* est formé d'une succession de nœuds et de branches qui partent de la racine pour aboutir à une feuille de l'arbre. En rouge ci-dessous est indiqué un chemin :



Dans un arbre probabiliste ce sont les chemins et non les nœuds qui représentent les issues. Dans cet arbre il y a 9 chemins qui correspondent à autant d'issues. Les issues sont souvent désignés par la succession (dans l'ordre) des nœuds :  $CA$  est le chemin passant d'abord par  $C$  puis par  $A$ .

2. Notons  $E_1$  : « Les deux personnes s'assoient sur le banc  $A$ . »

Calculons  $\mathbb{P}(E_1)$ .

$$E_1 = \{AA\}$$

Il y a équiprobabilité,  $E_1$  est réalisé par 1 issue et l'univers comporte 9 issues, donc

$$P(E_1) = \frac{1}{9}.$$

3. Notons  $E_2$  : « Les deux personnes s'assoient sur le même banc. »

Calculons  $\mathbb{P}(E_2)$ .

$$E_2 = \{AA; BB; CC\}$$

Il y a équiprobabilité,  $E_2$  est réalisé par 3 issues et l'univers comporte 9 issues, donc

$$P(E_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

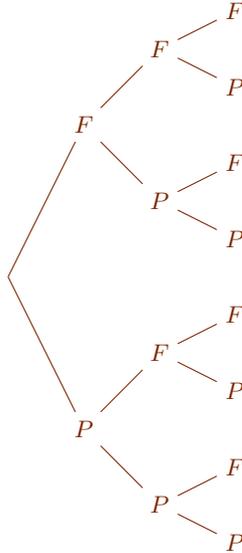
### Exercice 5. A

On lance 3 fois une pièce bien équilibrée.

1. Représentez la situation par un arbre.
2. Quelle est la probabilité :
  - (a) d'avoir 3 faces ?
  - (b) que le deuxième jet soit face ?
  - (c) que le troisième jet soit différent du premier ?

Correction de l'exercice 5

1.



Une issue de cette expérience est ici formée d'un triplet de résultats de pile ou face. Par exemple  $PPF$  est l'issue obtenir d'abord pile, puis face et enfin pile.

2. (a) Calculons  $\mathbb{P}(FFF)$ .

Il y a équiprobabilité et l'univers comporte 8 issues donc :

$$\mathbb{P}(FFF) = \frac{1}{8}.$$

(b) Notons  $A$  : « le deuxième jet est face ».Calculons  $\mathbb{P}(A)$ .

$$A = \{FFF, FFP, PFF, PFP\}.$$

Il y a équiprobabilité,  $A$  est réalisé par 4 issues et l'univers contient 8 issues donc  $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8}$ .

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}.$$

(c) Notons  $B$  : « le troisième jet est différent du premier ».Calculons  $\mathbb{P}(B)$ .

$$B = \{FFP, FPP, PFF, PPF\}.$$

Il y a équiprobabilité,  $B$  est réalisé par 4 issues et l'univers contient 8 issues donc  $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8}$ .

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

### Exercice 6. A

Un examinateur doit interroger, dans un certain ordre, quatre candidats : Arthur, Béatrice, Chloé et David. Il doit établir une liste ordonnée de quatre noms.

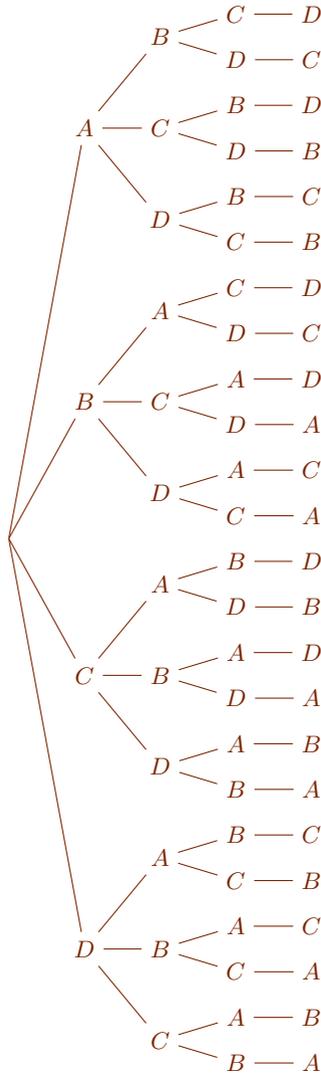
1. À l'aide d'un arbre, déterminez le nombre de listes possibles.
2. L'examineur tire la liste des quatre noms au hasard, chaque liste possible, ayant la même probabilité.

Déterminez la probabilité de chacun des événements suivants :

- $E$  : « Béatrice est interrogée en premier ».
  - $F$  : « Chloé est interrogée en dernier ».
  - $G$  : « David est interrogé avant Béatrice ».
3. Définir par une phrase l'événement  $E \cap F$  et en donner la probabilité.
  4. Définir par une phrase l'événement  $E \cup F$  et en donner la probabilité.

### Correction de l'exercice 6

1. L'arbre est particulièrement recommandé pour représenter une situation où des choix successifs sont fait : chaque niveau de l'arbre correspond un choix. Ainsi les niveaux de l'arbre représentent une chronologie.



L'univers contient 24 issues.

Rappelons qu'une issue correspond à un chemin sur l'arbre donc ici une issue peut être représentée par une succession de 4 lettres.

2. Calculons  $P(E)$ .

$E = \{BACD; BADC; BCAD; BCDA; BDAC; BDCA\}$ .

Il y a équiprobabilité,  $E$  est réalisé par 6 issues, l'univers contient 24 issues, donc

$$P(E) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Calculons  $P(F)$ .

$$F = \{ABDC; ADBC; BADC; BDAC; DABC; DBAC\}.$$

Il y a équiprobabilité,  $F$  est réalisé par 6 issues, l'univers contient 24 issues, donc

$$P(F) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Calculons  $P(G)$ .

$$G = \{ACDB; ADBC; ADCB; CADB; CDAB; CDBA; DABC; DACB; DBAC; DBCA; DCAB; DCBA\}.$$

Il y a équiprobabilité,  $G$  est réalisé par 12 issues, l'univers contient 24 issues, donc

$$P(G) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

### Exercice 7. A

Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix

- entre 2 entrées : Artichaut ou Betterave ;
- entre 3 plats : Cheval, Daube ou Escalope ;
- entre 2 desserts : Fromage ou Gâteau.

Un menu se compose :

- d'une entrée ;
- d'un plat ;
- d'un dessert.

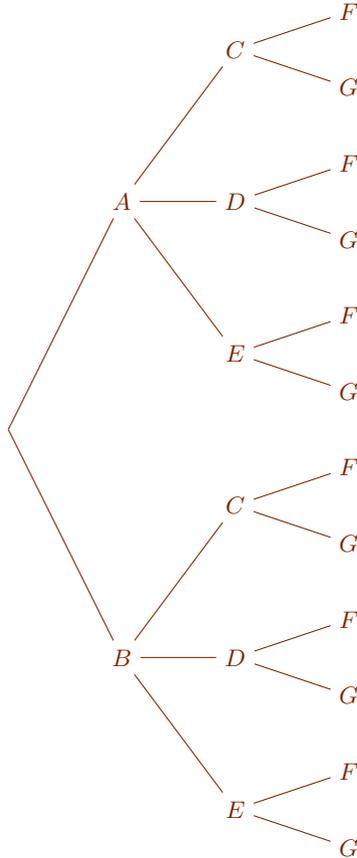
1. En utilisant un arbre, représenter tous les menus.
2. Combien de menus différents sont possibles ?
3. On choisit un menu au hasard.

Quelle est la probabilité :

- (a) qu'il comporte une escalope ?
- (b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
- (c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

### Correction de l'exercice 7

1. En utilisant des notations transparentes au vu de l'énoncé :



L'univers comporte donc 12 issues. Par exemple  $BDF$  est une issue.

2. D'après l'arbre

12 menus sont possibles.

3. (a) Notons  $M_1$  : « le menu comporte une escalope ».

Calculons  $\mathbb{P}(M_1)$ .

$$M_1 = \{AEF, AEG, BEF, BEG\}$$

Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et  $M_1$  est réalisé par 4 issues donc :  $\mathbb{P}(M_1) = \frac{4}{12}$ .

$$\mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{3}.$$

(b) Notons  $M_2$  : « le menu comporte de l'artichaut et du fromage ».

Calculons  $\mathbb{P}(M_2)$ .

$$M_2 = \{ACF, ADF, AEF\}$$

Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et  $M_2$  est réalisé par 3 issues donc :  $\mathbb{P}(M_2) = \frac{3}{12}$ .

$$\mathbb{P}(M_2) = \frac{1}{4}.$$

(c) Notons  $M_3$  : « le menu ne comporte pas de cheval ».

Calculons  $\mathbb{P}(M_3)$ .

$$\overline{M_3} = \{ACF, ACG, BCF, BCG\}$$

Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et  $\overline{M_3}$  est réalisé par 4 issues donc :  $\mathbb{P}(\overline{M_3}) = \frac{4}{12}$ .

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_3) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{M_3}) \\ &= 1 - \frac{4}{12} \\ &= \frac{8}{12} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(M_3) = \frac{2}{3}.$$

### Exercice 8.

Un groupe de 4 amis, Émile, Flore, Gaston et Hélène sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Déterminer les probabilités suivantes.
  - (a) C'est un garçon qui rame.
  - (b) Hélène écoper.
  - (c) Les deux qui travaillent sont de même sexe.

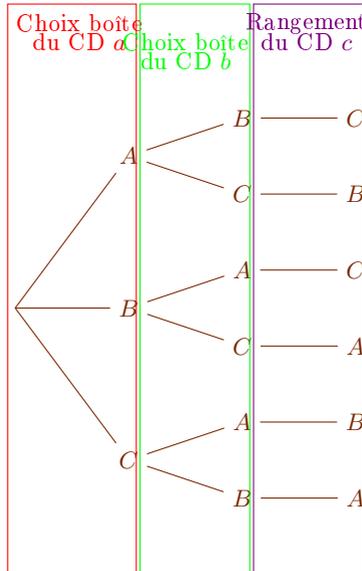
## Exercice 9.

Trois CD notés  $a$ ,  $b$  et  $c$  ont respectivement des boîtes nommées  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On range les 3 CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.

1. Combien de rangements sont possibles ?
2. Quelle est la probabilité
  - (a) que les 3 CD soient bien rangés ?
  - (b) qu'exactement 1 CD soit bien rangé ?
  - (c) qu'exactement 2 CD soient bien rangés ?
3. En déduire la probabilité qu'aucun CD ne soit bien rangé.

Correction de l'exercice 9

1.



2. (a) Notons
- $E_1$
- : « les trois CD sont bien rangés ».

Calculons  $\mathbb{P}(E_1)$ .

$$E_1 = \{ABC\}.$$

La loi de probabilité est l'équiprobabilité, l'univers comporte 6 issues et  $E_1$  est réalisé par une issue donc :

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{6}.$$

(b) Notons  $E_2$  : « exactement un CD est bien rangé ».

Calculons  $\mathbb{P}(E_2)$ .

$$E_2 = \{ACB, BAC, CBA\}.$$

La loi de probabilité est l'équiprobabilité, l'univers comporte 6 issues et  $E_2$  est réalisé par 3 issues donc :  $\mathbb{P}(E_2) = \frac{3}{6}$ .

$$\mathbb{P}(E_2) = \frac{1}{2}.$$

(c) Notons  $E_3$  : « exactement deux CD sont bien rangés ».

Calculons  $\mathbb{P}(E_3)$ .

$$E_3 = \emptyset.$$

$$\mathbb{P}(E_3) = 0.$$

3. Notons  $E_4$  : « aucun CD n'est bien rangé ».

Calculons  $\mathbb{P}(E_4)$ .

$$\overline{E_4} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

Comme  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  sont incompatibles (disjoints) deux à deux :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{E_4}) &= \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_4) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{E_4}) \\ &= 1 - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(E_4) = \frac{1}{3}.$$

## Exercice 10. A

Une urne contient 4 jetons : deux jaunes, un rose et un violet.

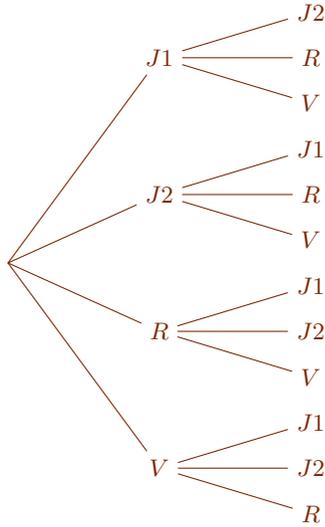
On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
3. On considère les événements :
  - $R$  : « Le 1<sup>er</sup> jeton tiré est rose » ;
  - $J$  : « Le 2<sup>e</sup> jeton tiré est jaune ».
  - (a) Déterminer  $\mathbb{P}(R)$  et  $\mathbb{P}(J)$ .
  - (b) Traduire par une phrase  $R \cap J$ .  
Calculer  $\mathbb{P}(R \cap J)$ .
  - (c) Calculer  $\mathbb{P}(R \cup J)$ .
4. On considère l'événement :
  - $N$  : « Aucun jeton tiré n'est jaune ».
  - (a) Calculer  $\mathbb{P}(N)$ .
  - (b) Exprimer  $\overline{N}$  par une phrase.
  - (c) Calculer  $\mathbb{P}(\overline{N})$ .

Correction de l'exercice 10

1. La modélisation la plus simple (car utilisant l'équiprobabilité) nécessite de distinguer les deux jetons jaunes :  $J_1$  et  $J_2$ .



2. D'après l'arbre précédent :  $\#(\Omega) = 12$ .

Il y a 12 tirages possibles.

3. (a) Calculons  $\mathbb{P}(\tilde{R})$ .

$$\tilde{R} = \{RJ1, RJ2, RV\}.$$

Il y a équiprobabilité,  $\tilde{R}$  est réalisé par 3 issues et l'univers contient 12 issues donc :  $\mathbb{P}(\tilde{R}) = \frac{3}{12}$ .

$$\mathbb{P}(\tilde{R}) = \frac{1}{4}.$$

Calculons  $\mathbb{P}(\tilde{J})$ .

$$\tilde{J} = \{J1J2, J2J1, RJ1, RJ2, VJ1, VJ2\}.$$

Il y a équiprobabilité,  $\tilde{J}$  est réalisé par 6 issues et l'univers contient 12 issues donc :  $\mathbb{P}(\tilde{J}) = \frac{6}{12}$ .

$$\mathbb{P}(\tilde{J}) = \frac{1}{2}.$$

- (b)

$\tilde{R} \cap \tilde{J}$  : « le premier jeton est rose et le second est jaune ».

Calculons  $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J})$ .

$$\tilde{R} \cap \tilde{J} = \{RJ1, RJ2\}.$$

Il y a équiprobabilité,  $\tilde{R} \cap \tilde{J}$  est réalisé par 2 issues et l'univers contient 12 issues donc :  $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \frac{2}{12}$ .

$$\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \frac{1}{6}.$$

(c) Calculons  $\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J})$ .

Ici peu importe la loi de probabilité nous allons utiliser une formule qui fonctionne pour toutes les lois de probabilités.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J}) &= \mathbb{P}(\tilde{R}) + \mathbb{P}(\tilde{J}) - \mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J}) = \frac{7}{12}.$$

4. (a) Calculons  $\mathbb{P}(N)$ .

$$N = \{VR, RV\}.$$

Il y a équiprobabilité,  $N$  est réalisé par 2 issues et l'univers contient 12 issues donc :  $\mathbb{P}(N) = \frac{2}{12}$ .

$$\mathbb{P}(N) = \frac{1}{6}.$$

(b)

$\bar{N}$  : « au moins un jeton est jaune ».

(c) Calculons  $\mathbb{P}(N)$ .

Ici peu importe la loi de probabilité nous allons utiliser une formule qui fonctionne pour toutes les lois de probabilités.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N) &= 1 - \mathbb{P}(\bar{N}) \\ &= 1 - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(N) = \frac{5}{6}.$$

## Exercice 11. A

Dans une classe de seconde, on a représenté dans le tableau suivant les langues vivantes étudiées en première langue par les 35 élèves. (On suppose que chaque élève étudie une seule première langue.)

	Anglais	Allemand	Espagnol
Garçons	8	3	4
Filles	10	4	6

On interroge au hasard un élève de cette classe. On s'intéresse aux événements suivants :

- $F$  : « l'élève interrogé est une fille ».
- $E$  : « l'élève interrogé étudie l'espagnol comme première langue ».

Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :  $E \cap F$ ,  $E \cup F$ ,  $\overline{E} \cap \overline{F}$  et  $E \cup \overline{F}$ .

Correction de l'exercice 11

Choisir un élève parmi les 35 est une expérience aléatoire nous modélisons cette expérience par un univers de 35 issues muni de l'équiprobabilité (chaque élève a autant d'être choisi qu'un autre).

Remarquons que, comme tout modélisation, le choix de l'équiprobabilité est arbitraire.

1. Calculons  $\mathbb{P}(E \cap F)$ .

Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées  $E \cap F$  est réalisé par 6 issues et l'univers comporte 35 issues donc

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \frac{6}{35}.$$

2. Calculons  $\mathbb{P}(E \cup F)$ .

Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées  $E \cup F$  est réalisé par  $10 + 4 + 6 + 4 = 24$  issues et l'univers comporte 35 issues donc

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \frac{24}{35}.$$

3. Calculons  $\mathbb{P}(\overline{E} \cup \overline{F})$ .

Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées  $\overline{E} \cap \overline{F}$  est réalisé par  $8 + 3 = 11$  issues et l'univers comporte 35 issues donc

$$\mathbb{P}(\overline{E} \cup \overline{F}) = \frac{11}{35}.$$

4. Calculons  $\mathbb{P}(E \cup \bar{F})$ .

Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées  $E \cup \bar{F}$  est réalisé par  $8 + 3 + 4 + 6 = 21$  issues et l'univers comporte 35 issues donc

$$\mathbb{P}(E \cup \bar{F}) = \frac{21}{35}.$$

## Exercice 12. A

Un car scolaire se dirige vers Saint Jacques de Compostelle en passant par Conques avec à son bord 75 élèves dont 40 garçons.

Miguel, le chauffeur, fait un sondage auprès des élèves pour savoir qui aime les chants grégoriens. Il découvre alors que 32 élèves ne les aiment pas, dont la moitié sont des filles, et que 20 % des garçons les aiment, et que 18 filles n'en ont jamais entendu parler.

1. Recopie et complète le tableau ci-dessous.

	Aime	N'aime pas	Ne connaît pas	Total
Garçons				
Filles				
Total				

2. On tire au hasard la fiche d'un élève.

Quelle est la probabilité que :

- (a) ce soit un garçon ;
- (b) ce soit un garçon qui aime les chants grégoriens ;
- (c) ce soit un garçon ou un élève qui aime les chants grégoriens ;

3. On tire au hasard la fiche d'un garçon.

Quelle est la probabilité qu'il aime les chants grégoriens ?

Correction de l'exercice 12

Illustre bien le fait que sur un univers fini muni de l'équiprobabilité probabilité et proportions se confondent.

- 1.

	Aime	N'aime pas	Ne connaît pas	Total
Garçons	8	16	16	40
Filles	1	16	18	35
Total	9	32	34	75

2. Nous choisissons l'équiprobabilité sur un univers de 75 issues pour modéliser l'expérience aléatoire.

- (a) Notons  $G$  : « la fiche est celle d'un garçon ».

Calculons  $\mathbb{P}(G)$ .

Il y a équiprobabilité,  $G$  est réalisé par 40 issues et l'univers contient 75 issues donc :  $\mathbb{P}(G) = \frac{40}{75}$ .

$$\mathbb{P}(G) = \frac{8}{15}.$$

- (b) Notons  $H$  : « la fiche est celle d'un garçon qui aime les chants grégoriens ».

Calculons  $\mathbb{P}(H)$ .

Il y a équiprobabilité,  $H$  est réalisé par 8 issues et l'univers contient 75 issues donc :

$$\mathbb{P}(G) = \frac{8}{75}.$$

- (c) Notons  $L$  : « la fiche est celle d'un garçon ou un élève qui aime le chant grégorien ».

Calculons  $\mathbb{P}(L)$ .

Il y a équiprobabilité,  $L$  est réalisé par  $8 + 16 + 16 + 1 = 41$  issues et l'univers contient 75 issues donc :

$$\mathbb{P}(G) = \frac{41}{75}.$$

3. Puisque la fiche est tirée parmi celle des garçons l'univers est modifié. Choisissons une modélisation adaptée.

Choisissons la loi de probabilité uniforme sur un univers de 40 issues.

Notons  $M$  : « la fiche est celle d'un garçon qui aime le chant grégorien ».

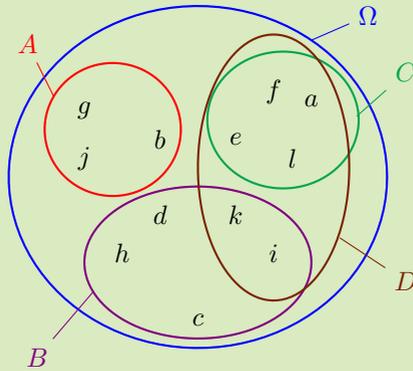
Calculons  $\mathbb{P}(M)$ .

Il y a équiprobabilité,  $M$  est réalisé par 8 issues et l'univers contient 40 issues donc :  $\mathbb{P}(M) = \frac{8}{40}$ .

$$\mathbb{P}(M) = \frac{1}{5}.$$

Vous verrez l'année prochaine un outils qui permet de faire ce genre de calcul sans avoir besoin de choisir une nouvelle modélisation appelé la probabilité conditionnelle.

## Exercice 13. B



1.
  - a) Justifiez que  $A$ ,  $B$  et  $C$  forment un système complet d'événements.
  - b) Exprimez  $\mathbb{P}(A)$  en fonction de probabilités d'événements élémentaires.
  - c) Justifiez que  $\mathbb{P}(C) \leq \mathbb{P}(D)$ .

2. La loi de probabilité sur  $\Omega$  est définie par la distribution :

$\omega$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$	$k$	$l$
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{12}$

- a) Calculez  $\mathbb{P}(A)$ ,  $\mathbb{P}(B)$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B)$  et déduisez-en  $\mathbb{P}(A \cup B)$ .
- b) Calculez  $\mathbb{P}(C \cap D)$ .
- c) Calculez  $\mathbb{P}(B \cup C)$ .

## Exercice 14. C

Calculez la probabilité que deux élèves d'une classe de 35 élèves soient nés le même jour de l'année.

## Exercice 15. C

On lance un dé bien équilibré à six faces dont trois sont bleues, deux sont blanches et une est rouge.

1. Les trois couleurs sont-elles équiprobables ?
2. Déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur.

## Correction de l'exercice 15

Commençons par modéliser cette situation avec l'équiprobabilité.

Notons  $\Omega = \{B_1, B_2, B_3, Bl_1, Bl_2, R\}$  et munissons cet univers de l'équiprobabilité.

Notons

- $E_1$  : « obtenir le bleu »,
- $E_2$  : « obtenir le blanc »,
- $E_3$  : « obtenir le rouge ».

Comme dans tous les exercices précédents :  $\mathbb{P}(E_1) = \frac{3}{6}$ ,  $\mathbb{P}(E_2) = \frac{2}{6}$  et  $\mathbb{P}(E_3) = \frac{1}{6}$ .

Les trois couleurs ne sont pas équiprobables.

Considérons une autre modélisation.

On considère  $\Omega = \{B, Bl, R\}$  muni de la loi de probabilité :

$\omega$	$B$	$Bl$	$R$
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Nous avons bien une probabilité puisque la somme des probabilités égale 1.

Les probabilités sont alors immédiates et la conclusion est bien

les trois couleurs ne sont pas équiprobables.

### Exercice 16. C

Dites si les listes proposées sont des distributions de probabilité.

a)  $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{15}\right)$ .

b)  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ .

c)  $(0, 1; 0, 4; 0, 2; 0, 27; 0, 03)$ .

d)  $\left(\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{9}{16}\right)$ .

### Exercice 17. C

On lance 5 fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir 0 pile? 1 pile? 4 piles? 5 piles?