09 Probabilités.

I Définition axiomatique.

Rappelons qu'un espace probabilisable est la donnée d'un univers Ω et d'une famille d'événements appelée une tribu $\mathscr{E}$.

Le terme dénombrable désigne des ensembles de la même taille que $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathscr{E})$ un espace probabilisable.

On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{E})$ tout application $\mathbb{P} : \mathscr{E} \to [0;1]$ vérifiant les axiomes suivants :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(ii) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$,

(iii) $\forall A, B \in \mathscr{E},\ [A \subset B] \Rightarrow [\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)]$.

(iv) $\forall A, B \in \mathscr{E},\ [A \cap B = \varnothing] \Rightarrow [\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)]$.

(v) Si les événements A_i, pour $i \in I$, forment une famille dénombrable d'événements deux à deux disjoints alors : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$.

Souvent nous définirons une probabilité en donnant sa *distribution de probabilité* c'est-à-dire les probabilités de chacune des issues. Ainsi $((P;0,4),(F;0,6))$ est une distribution de probabilité modélisant un pile-ou-face avec une pièce pipée. On présente parfois les distributions de probabilité sous forme d'un tableau :

Issues	P	F
Probabilité	$0,4$	$0,6$

Certaines lois sont de référence est ont des noms particuliers. Lorsque toutes les issues ont la même probabilité ont dit que la *loi est uniforme* sur Ω. Ainsi a un lancé de dé équilibré à 6 faces est associé la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.

Proposition 1

Une famille au plus dénombrable $(p_i)_{i\in I}$ de nombres est une distribution de probabilité si et seulement si : les p_i sont tous positifs et $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$.

Lorsqu'on a défini une probabilité sur un espace probabilisable on dit que l'espace est probabilisé. Ainsi $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé*.

II Propriétés.

Proposition 2 - probabilité d'un événement et des issues.

Soient :

. $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $n \in \mathbb{N}$,

. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un événement.

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(a_i).$$

Le précédent résultat se généralise à des événements dénombrables.

Proposition 3

Soit $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathscr{E}$.

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Proposition 4 - Formule du crible.

Soit $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

$$\forall A, B \in \mathscr{E},\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

III Exercices.

Exercice 1. A

On lance un dé pipé. La distribution de probabilité est donnée par le tableau suivant.

F (face)	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(F)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	?

1. Calculer $\mathbb{P}(\{6\})$.
2. Calculer la probabilité des événements suivants.
   (a) « La face obtenue est paire » ;
   (b) « la face obtenue est supérieur ou égale à 5 ».

Exercice 2. A

Un square est équipé de trois bancs. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. L'objet de l'exercice est de déterminer la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte.
Les trois bancs sont notés A, B et C.

1. Représentez la situation par un arbre et donnez l'univers.
2. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient sur le banc A.
3. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient côte à côte.

Exercice 3. A

On lance 3 fois une pièce bien équilibrée.

1. Représentez la situation par un arbre et donnez l'univers.
2. Quelle est la probabilité :
   a) d'avoir 3 faces ?
   b) que le deuxième jet soit face ?
   c) que le troisième jet soit différent du premier ?

Exercice 4. A

Un examinateur doit interroger, dans un certain ordre, quatre candidats : Arthur, Béatrice, Chloé et David. Il doit établir une liste ordonnée de quatre noms.

1. À l'aide d'un arbre, déterminez le nombre de listes possibles et donnez l'univers.
2. L'examinateur tire la liste des quatre noms au hasard, chaque liste possible, ayant la même probabilité.
   Déterminez la probabilité de chacun des événements suivants :
   - E :« Béatrice est interrogée en premier ».
   - F :« Chloé est interrogée en dernier ».
   - G :« David est interrogé avant Béatrice ».
3. Définir par une phrase l'événement $E \cap F$ et en donner la probabilité.
4. Définir par une phrase l'événement $E \cup F$ et en donner la probabilité.

Exercice 5. A

Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix

- entre 2 entrées : Artichaut ou Betterave ;
- entre 3 plats : Cheval, Daube ou Escalope ;
- entre 2 desserts : Fromage ou Gâteau.

Un menu se compose : d'une entrée, d'un plat et d'un dessert.

1. En utilisant un arbre, représenter tous les menus et donnez l'univers.
2. Combien de menus différents sont possibles ?
3. On choisit un menu au hasard.
   Quelle est la probabilité :
   a) qu'il comporte une escalope ?
   b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
   c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

Exercice 6.

Un groupe de 4 amis, Émile, Flore, Gaston et Hélène sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.

1. Représenter cette situation par un arbre puis donnez l'univers.
2. Déterminer les probabilités suivantes.
   (a) C'est un garçon qui rame.
   (b) Hélène écope.
   (c) Les deux qui travaillent sont de même sexe.

Exercice 7.

Trois CD notés a, b et c ont respectivement des boîtes nommées A, B et C.
On range les 3 CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.

1. Combien de rangements sont possibles ?
2. Quelle est la probabilité
   (a) que les 3 CD soient bien rangés ?
   (b) qu'exactement 1 CD soit bien rangé ?
   (c) qu'exactement 2 CD soient bien rangés ?
3. En déduire la probabilité qu'aucun CD ne soit bien rangé.

Exercice 8. A

Une urne contient 4 jetons : deux jaunes, un rose et un violet.
On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
3. On considère les événements :
   — R : « Le 1^er^ jeton tiré est rose » ;
   — J : « Le 2^e^ jeton tiré est jaune ».
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(J)$.
   (b) Traduire par une phrase $R \cap J$.
   Calculer $\mathbb{P}(R \cap J)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(R \cup J)$.
4. On considère l'événement :
   — N :« Aucun jeton tiré n'est jaune ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(N)$.
   (b) Exprimer $\overline{N}$ par une phrase.
   (c) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{N}\right)$.

Exercice 9. A

Dans une classe de seconde, on a représenté dans le tableau suivant les langues vivantes étudiées en première langue par les 35 élèves. (On suppose que chaque élève étudie une seule première langue.)

	Anglais	Allemand	Espagnol
Garçons	8	3	4
Filles	10	4	6

On interroge au hasard un élève de cette classe. On s'intéresse aux événements suivants :

- F : « l'élève interrogé est une fille ».
- E : « l'élève interrogé étudie l'espagnol comme première langue ».

Calculez la probabilité de chacun des événements suivants : $E \cap F$, $E \cup F$, $\overline{E} \cap \overline{F}$ et $E \cup \overline{F}$.

Exercice 10. A

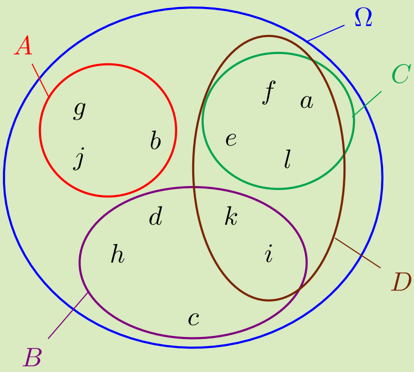
Un car scolaire se dirige vers Saint Jacques de Compostelle en passant par Conques avec à son bord 75 élèves dont 40 garçons.
Miguel, le chauffeur, fait un sondage auprès des élèves pour savoir qui aime les chants grégoriens. Il découvre alors que 32 élèves ne les aiment pas, dont la moitié sont des filles, et que 20 % des garçons les aiment, et que 18 filles n'en ont jamais entendu parler.

1. Recopie et complète le tableau ci-dessous.

	Aime	N'aime pas	Ne connaît pas	Total
Garçons				
Filles				
Total				

2. On tire au hasard la fiche d'un élève.
Quelle est la probabilité que : ce soit un garçon ? ce soit un garçon qui aime les chants grégoriens ? ce soit un garçon ou un élève qui aime les chants grégoriens ?
3. On tire au hasard la fiche d'un garçon. Quelle est la probabilité qu'il aime les chants grégoriens ?

Exercice 11. B



1. a) Justifiez que A, B et C forment un système complet d'événements.

   b) Exprimez $\mathbb{P}(A)$ en fonction de probabilités d'événements élémentaires.

   c) Justifiez que $\mathbb{P}(C) \leqslant \mathbb{P}(D)$.

2. La loi de probabilité sur Ω est définie par la distribution :

ω	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{12}$

   a) Calculez $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et déduisez-en $\mathbb{P}(A \cup B)$.

   b) Calculez $\mathbb{P}(C \cap D)$.

   c) Calculez $\mathbb{P}(B \cup C)$.

Exercice 12. C

Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone. On considère les événements :

- O_1 : « La 1er ligne est occupée ».
- O_2 : « La 2e ligne est occupée ».

Une étude statistique montre que :

- $p(O_1) = 0,4$
- $p(O_2) = 0,3$
- $p(O_1 \cap O_2) = 0,2$

Calculer la probabilité des événements suivants.

1. « La ligne 1 est libre ».
2. « Au moins une des lignes est occupée ».
3. « Au moins une des lignes est libre ».

Exercice 13. C

Calculez la probabilité que deux élèves d'une classe de 35 élèves soient nés le même jour de l'année.

Exercice 14. C

On lance un dé bien équilibré à six faces dont trois sont bleues, deux sont blanches et une est rouge.

1. Les trois couleurs sont-elles équiprobables ?
2. Déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur.

Exercice 15. C

Dites si les listes proposées sont des distributions de probabilité.

a) $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{15}\right)$.

b) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$.

c) $(0,1; 0,4; 0,2; 0,27; 0,03)$.

d) $\left(\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{9}{16}\right)$.

Exercice 16. C

On lance 5 fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir 0 pile ? 1 pile ? 4 piles ? 5 piles ?

Exercice 17.

On jette trois fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b et c les numéros obtenus. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
Déterminer la probabilité pour que l'équation du second degré ait :

1. deux racines réelles distinctes,
2. une racine réelle double,
3. pas de racines réelles.

Exercice 18.

On lance une pièce une infinité de fois. On note pour $n \geqslant 3$, B_n l'événement « on obtient face au $(n-2)$-ème lancer, pile au $(n-1)$-ème lancer et pile au n-ème lancer ».
Pour $n \geqslant 3$, les événements B_n et B_{n+2} sont-ils incompatibles ?

Exercice 19.

On dispose d'une urne avec 3 boules : une bleue, une verte et une rouge. On tire une boule dans l'urne :

- Si elle est verte, on perd 5 euros.
- Si elle est bleue, on joue à pile ou face : on gagne 10 euros si on fait face, et on perd 10 euros si on fait pile.
- Si elle est rouge, on gagne 3 euros.

On note V : « on obtient la boule verte », B : « On obtient la boule bleue » , R : « On obtient la boule rouge », F : « On fait face au jeu pile ou face », et G : « On gagne de l'argent ».
Justifiez que $G = (B \cup F) \cup R$.

Exercice 20.

Soit $n \geqslant 2$. On dispose de n dés. Pour $k \in [\![1, n[\![$, le k-ème dé est un dé à k faces numérotées de 1 à k.
On lance tous les dés l'un après l'autre. Un lancer est considéré comme gagnant si le dé tombe sur 1.
Quelle est la probabilité de gagner au moins deux lancers de dés ?