

08 Sommes et produits finis.

I Sommes.

II Produits.

III Exercices.

Exercice 1. A

Calculez la somme des 100 premiers entiers naturels.

Exercice 2. B

Écrivez les calculs suivants sans le symbole de sommation \sum puis calculez.

a) $\sum_{k=0}^5 k,$

b) $\sum_{k=0}^5 2k,$

c) $\sum_{k=0}^5 2k + 1,$

d) $\sum_{k=1}^3 k^2,$

e) $\sum_{k=2}^3 k^3,$

f) $\sum_{k=1}^3 2k^2 + 1.$

Correction de l'exercice 2

1. $\sum_{k=0}^5 k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$
2. $\sum_{k=0}^5 2k = 2 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5 = 30.$
Ou : $\sum_{k=0}^5 2k = 2 \sum_{k=0}^5 k = 2 \times 15 = 30$
3. $\sum_{k=0}^5 2k + 1 = 2 \times 1 + 1 + 2 \times 2 + 1 + 2 \times 3 + 1 + 2 \times 4 + 1 + 2 \times 5 + 1 =$
Ou : $\sum_{k=0}^5 2k + 1 = \left(\sum_{k=0}^5 2k \right) + \left(\sum_{k=0}^5 1 \right) = 30 + 6.$
4. $\sum_{k=1}^3 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14.$
5. $\sum_{k=2}^3 k^3 = 2^3 + 3^3 = 35.$
6. $\sum_{k=1}^3 2k^2 + 1 = 2 \left(\sum_{k=1}^3 k^2 \right) + \left(\sum_{k=1}^3 1 \right) = 2 \times 14 + 3 = 31.$

Exercice 3. B

1. Calculez $\sum_{k=1}^4 (-1)^k.$

2. Conjecturez $\sum_{k=1}^n (-1)^k,$ pour n un entier naturel non nul quelconque.

Correction de l'exercice 3

- $\sum_{k=1}^4 (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 = 0.$
- $\sum_{k=1}^n (-1)^k = \frac{1 - (-1)^n}{2}.$

Exercice 4. B

Calculez $\prod_{k=1}^4 k^2.$

Exercice 5. B

Calculez $\prod_{k=1}^{257} \frac{k+1}{k}.$

Exercice 6. B

Démontrez que $\sum_{k=1}^4 \ln\left(\frac{k}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$

Exercice 7. C

Écrivez les sommes suivantes avec le symbole sommatoire Σ .

- $A = 2 + 4 + 6 + 8 + 10.$
- $B = 1 + 3 + 5 + 7 + 9.$
- $C = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10.$
- $D = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720.$
- $E = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{1\,000\,000} + \frac{1}{100\,000\,000}.$
- $F = 1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + 7 + \frac{1}{8} + 9 + \frac{1}{10}.$

Exercice 8. C

Réécrivez les calculs suivants avec un symbole de sommation Σ .

- $S_1 = \frac{2}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{4^2}$
- $S_2 = 1 + \cos(\sqrt{2}) + \cos(2\sqrt{2}) + \cos(3\sqrt{2}) + \cos(4\sqrt{2}) + \cos(5\sqrt{2}),$
- $S_3 = \ln(3) + \ln(5) + \ln(7) + \ln(9) + \dots + \ln(27) + \ln(31),$
- $S_4 = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 3 \times 4,$
- $S_5 = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6,$
- $S_6 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125.$

