

08 Sommes et produits finis.

I Sommes.

Nous serons amenés à écrire de très longues sommes, certaines même, infinies. Il a fallu mettre au point une notation idoine. C'est la lettre grecque sigma, Σ , qui a été retenue.

Si on note $a_1 = 3$, $a_2 = -6$ et $a_3 = 12$ alors la somme écrite en extension $a_1 + a_2 + a_3 = 3 + (-6) + 12$ peut être notée $\sum_{i=1}^3 a_i$.

Il s'agit d'un symbole important que nous retrouverons aussi bien en probabilité qu'en algèbre linéaire.

$$\sum_{k=1}^5 f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$$

f est une formule de calcul (une fonction par exemple).

k est une variable qui prend des valeurs entières.

1 est la première valeur prise par k .

5 est la dernière valeur prise par k .

k doit prendre toutes les valeurs entières de 1 jusqu'à 5.

On peut remarquer l'analogie entre cette somme discrète, \sum , et la somme continue, \int , appelée intégrale vue en terminale.

$$\sum_{k=1}^5 f(k) \leftrightarrow \int_1^5 f(t) dt$$

II Produits.

Il existe un symbole pour signifier une successions de produit qui est le pi majuscule : Π .

Il s'utilise de la même façon que Σ . Ainsi : $\prod_{k=1}^3 k^7 = 1^7 \times 2^7 \times 3^7$.

III Exercices.

Exercice 1. A

Calculez la somme des 100 premier entiers naturels.

Exercice 2. B

Écrivez les calculs suivants sans le symbole de sommation \sum puis calculez.

a) $\sum_{k=0}^5 k,$

b) $\sum_{k=0}^5 2k,$

c) $\sum_{k=0}^5 2k + 1,$

d) $\sum_{k=1}^3 k^2,$

e) $\sum_{k=2}^3 k^3,$

f) $\sum_{k=1}^3 2k^2 + 1.$

Exercice 3. B

1. Calculez $\sum_{k=1}^4 (-1)^k.$

2. Conjecturez $\sum_{k=1}^n (-1)^k,$ pour n un entier naturel non nul quelconque.

Exercice 4. B

Calculez $\prod_{k=1}^4 k^2.$

Exercice 5. B

Calculez $\prod_{k=1}^{257} \frac{k+1}{k}.$

Exercice 6. B

Démontrez que $\sum_{k=1}^4 \ln\left(\frac{k}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$

Exercice 7. C

Écrivez les sommes suivantes avec le symbole sommatoire $\Sigma.$

1. $A = 2 + 4 + 6 + 8 + 10.$

2. $B = 1 + 3 + 5 + 7 + 9.$

3. $C = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10.$

4. $D = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720.$

5. $E = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{1\,000\,000} + \frac{1}{100\,000\,000}.$

6. $F = 1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + 7 + \frac{1}{8} + 9 + \frac{1}{10}.$

Exercice 8. C

Réécrivez les calculs suivants avec un symbole de sommation \sum .

$$1. S_1 = \frac{2}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{4^2}$$

$$2. S_2 = 1 + \cos(\sqrt{2}) + \cos(2\sqrt{2}) + \cos(3\sqrt{2}) + \cos(4\sqrt{2}) + \cos(5\sqrt{2}),$$

$$3. S_3 = \ln(3) + \ln(5) + \ln(7) + \ln(9) + \cdots + \ln(27) + \ln(31),$$

$$4. S_4 = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 3 \times 4,$$

$$5. S_5 = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6,$$

$$6. S_6 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125.$$

