# 07 Espace $\mathbb{R}^n$.

## I Des opérations sur les vecteurs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$ est l'ensemble des $n$-uplets (ou $n$-listes) de nombres réels.
Les éléments de $\mathbb{R}^n$ peuvent être notés en ligne, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ou en colonne, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Les $n$-uplets doivent se comprendre comme des vecteurs c'est-à-dire des déplacements associés à des translations.

La succession de deux translations est encore une translation ; on dit dans ce cas qu'on somme les vecteurs (rappelez-vous la relation de Chasles). De même en multipliant un vecteur par deux on double la longueur du déplacement, tandis que multiplier par $-1$ signifie aller en sens contraire.

Définition 1

On définit une *loi interne de $\mathbb{R}^n$* appelée *somme*, c'est-à-dire une fonction

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

en posant

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

On définit une *loi semi-externe sur $\mathbb{R}^n$* appelée *multiplication par un scalaire*, c'est-à-dire une fonction

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

en posant

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

Puisque les $n$-uplets sont des vecteurs, nous noterons souvent $\vec{x}$ pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ainsi nous écrirons $\vec{x} + \vec{y}$ et $a \cdot \vec{x}$ ou même $a\vec{x}$.

On notera $\vec{0}$, et on appellera *vecteur nul*, le $n$-uplet de zéros.

## II Propriétés des opérations.

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est muni de deux lois : l'addition et la multiplication par un scalaire.

Ces deux opération vérifient les propriétés suivantes.

(i) L'addition est commutative.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \ \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}.$$

(ii) L'addition est associative.

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n, \ \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}.$$

(iii) La multiplication par un scalaire est associative.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ (ab) \cdot \vec{x} = a \cdot (b \cdot \vec{x}).$$

(iv) Vecteur opposé et multiplication par $-1$.

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ \vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

(v) Distributivité.

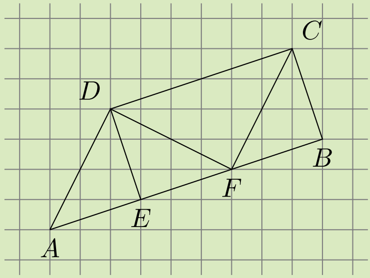
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \ (a + b) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y} + b \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y}.$$

## III Exercices.

## Exercice 1. A

Par lecture graphique indiquez

1. un vecteur égale à $\overrightarrow{AE}$ ; à $\overrightarrow{CF}$.
2. un vecteur de même direction que $\overrightarrow{CB}$ mais de sens opposé ; idem pour $\overrightarrow{AF}$.
3. un vecteur égale à $\overrightarrow{DC}$ d'extrémité $F$ ; égale à $\overrightarrow{FB}$ d'origine $A$.
4. deux vecteurs de même de direction, de même sens qui ne sont pas égaux.
5. deux vecteurs de même norme qui ne sont pas égaux.



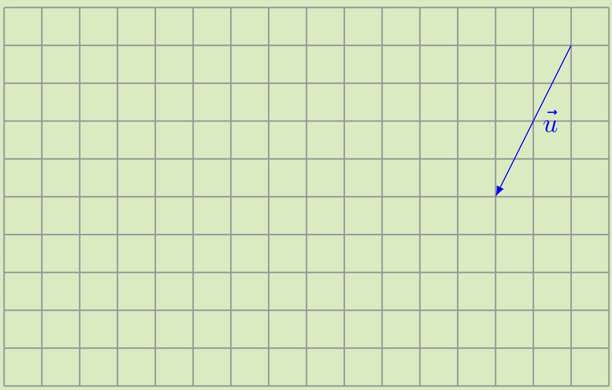

## Exercice 2. A

Représentez graphiquement les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants.

a) $\vec{x} = (1; 4)$.  b) $\vec{y} = (-4; 6)$.  c) $\vec{z} = (8; 2)$.

d) $\vec{s} = (3; -5)$.  e) $\vec{t} = (3; 0)$.  f) $\vec{v} = (-5; 0)$.

*On a dessiné le vecteur $\vec{u} = (-2; 4)$ ; $-2$ en abscisses et $-4$ en ordonnées.*

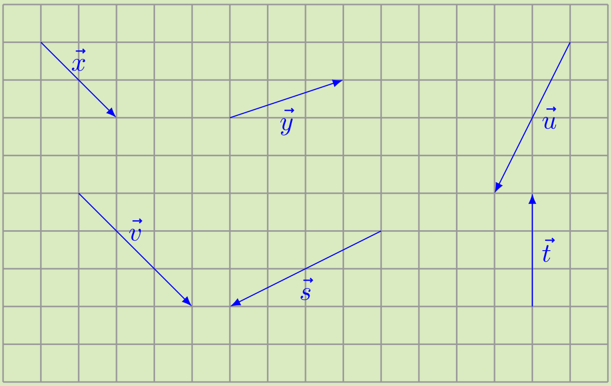


**Exercice 3.** A

Représentez graphiquement les vecteurs sommes de $\mathbb{R}^2$ suivants.

a) $\vec{x} + \vec{y}$.
b) $\vec{v} + \vec{s}$.
c) $\vec{v} + \vec{y}$.
d) $\vec{u} + \vec{t}$.
e) $\vec{v} + \vec{x}$.
f) $\vec{u} - \vec{s}$.
g) $-\vec{x} + \vec{v}$.
h) $\vec{y} + \vec{t}$.
i) $\vec{x} + \vec{t}$.

*On a dessiné le vecteur $\vec{u}$ obtenu comme somme $\vec{u} = \vec{x} + \vec{s}$.*

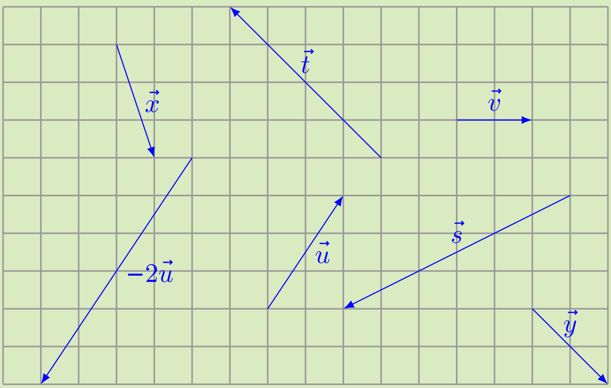



**Exercice 4.** A

Représentez graphiquement les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants.

a) $2 \cdot \vec{x}$.
b) $-3 \cdot \vec{v}$.
c) $4 \cdot \vec{y}$.
d) $\frac{1}{2} \cdot \vec{t}$.
e) $\frac{1}{3} \cdot \vec{s}$.
f) $-\frac{2}{3} \cdot \vec{s}$.

*On a dessiné le vecteur $-2 \cdot \vec{u}$.*



## Exercice 5. B

Calculez le vecteur $\vec{x}$ dans les cas suivants (donnez-en les coordonnées).

1. a) $\vec{x} = (2;3) + (-2;1)$.
   b) $\vec{x} = (4;5;-7) + (-3;-5;12)$.
   c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -27 \end{pmatrix}$.
   e) $\vec{x} = 7 \cdot (6;7)$.
   f) $\vec{x} = -7 \cdot (5;8;9)$.
   g) $\vec{x} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$.
   h) $\vec{x} = -8 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1/8 \end{pmatrix}$.
   i) $\vec{x} = 8 \cdot (5;-4) + 2 \cdot (1;0)$.
   j) $\vec{x} = 9 \cdot (2;5;7) - 5 \cdot (0;7;-9)$.
   k) $\vec{x} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -37 \end{pmatrix}$.
   l) $\vec{x} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$.
   m) $\vec{x} = 8 \cdot ((5;-4) + 2 \cdot (1;0))$.
   n) $\vec{x} = 2\,((3;-5;2) - 4 \cdot (9;6;7))$.
   o) $\vec{x} = -1 \cdot \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.
   p) $\vec{x} = 3 \cdot \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

2. On note $\vec{u} = (2;3)$, $\vec{v} = (-1;1)$ et $\vec{w} = (0;-3)$.
   a) $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$.
   b) $\vec{x} = \vec{v} + \vec{w}$.
   c) $\vec{x} = \vec{u} + \vec{w}$.
   d) $\vec{x} = 4 \cdot \vec{u} + \vec{v}$.
   e) $\vec{x} = -3 \cdot (\vec{u} + \vec{v})$.
   f) $\vec{x} = (3 - 14) \cdot \vec{u} - \vec{v}$.
   g) $\vec{x} = 2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v} + 6\vec{w}$.
   h) $\vec{x} = -5 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} - \vec{w}$.
   i) $\vec{x} = \frac{1}{3} \cdot \vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{3} \cdot \vec{w}$.
   j) $\vec{x} = \frac{1}{2} \cdot \vec{u} + \frac{1}{3} \cdot \vec{v} + \frac{1}{5} \cdot \vec{w}$.

## Exercice 6. B

Exprimez, si possible, $\vec{x}$ en fonction de $\vec{u}$. *Ainsi, si* $\vec{x} = (2;-6)$ *et* $\vec{u} = (-1;3)$ *alors* $\vec{x} = -2 \cdot \vec{u}$.

a) $\vec{x} = (12;-21)$ et $\vec{u} = (4;-7)$.

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 36 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{x} = (36;27;18)$ et $\vec{u} = (12;9;6)$.

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 49 \\ -21 \\ -56 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

e) $\vec{x} = (2;1)$ et $\vec{u} = (6;3)$.

f) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

## Exercice 7. C

Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ;
Démontrez les égalités proposées.

a) $2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \end{pmatrix}$.

b) $7 \cdot \begin{pmatrix} -3x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -7x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 9x_2 \end{pmatrix}$.

c) $-8\left(\begin{pmatrix} 2x_1 \\ -3x_2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -20x_1 \\ 36x_2 \end{pmatrix}$.

d) $x_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3x_1 - 3 \\ x_3x_2 + 4 \end{pmatrix}$.

e) $2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 + 3x_3) \\ -x_2 \end{pmatrix}$.