06 Limite d'une suite.

I Suite.

II Limite finie d'une suite.

III Limite infinie d'une suite.

IV Unicité de la limite.

V Suites de référence.

VI Opérations sur les suites convergentes.

VII Exercices.

Exercice 1. A

Donnez les limites des suites suivantes dont on donne le terme général, u_n, après avoir identifier une suite de référence.

a) n^4.

b) $\frac{1}{n^3}$.

c) 2^n.

d) $\frac{1}{2^n}$.

e) $n!$.

f) $\ln(n)$.

g) n^{-7}.

h) n.

i) n^{-2}.

j) $0,3^n$.

k) 10^n.

l) $\frac{1}{n^7}$.

m) $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

n) e^n.

o) $\frac{1}{n^{-2}}$.

Exercice 2. B

Identifier parmi les suites dont le terme général est donné ci-après, les situations conduisant à une forme indéterminée lors de l'étude de la convergence, sinon donnez la limite.

On peut schématiquement résumer les formes indéterminées par :

$$(+\infty)-(+\infty),\quad (-\infty)-(-\infty),\quad 0\times\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{}{0^?}.$$

a) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2^n}$.

b) n^2-6^n.

c) $\ln(n^{-1})+n!$.

d) $2^{-n}+\ln(n)$.

e) $n^{12}+\dfrac{1}{n^{100}}$.

f) $\dfrac{1}{\ln(n)}+n!+1$.

g) $n^2 3^n$.

h) $\dfrac{n^2}{n^{12}}$.

i) $\dfrac{n!}{2^n}$.

j) $n^{-2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$.

k) $\dfrac{n^{-3}}{\ln(n)}$.

l) $n^5 2^{-n}$.

m) $n^{-3}+0,5^n\ln(n)$.

n) $\dfrac{1}{n^4}\times \mathrm{e}^n+4$.

o) $\dfrac{\ln(n)}{\mathrm{e}^n}$.

Exercice 3. B

Déterminez, si possible la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) n^7+12.

b) 4^n-7.

c) $n^3+\dfrac{0,1^n}{\ln(n)}$.

d) $\dfrac{1}{n}+4$.

e) $n^{-4}+\ln(n)$.

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+2+\dfrac{1}{n^2}$.

g) $n!n^2+2-\dfrac{1}{n^2}$.

h) $\dfrac{\ln(n)}{2+\mathrm{e}^{-n}}$.

i) $\dfrac{n^4+1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-4}$.

j) $\dfrac{n\times 2^n}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$.

k) $n!-\left(2-n^2\right)$.

l) $n^2\left(n^3+\dfrac{3}{\ln(n)}+1\right)$.

m) $2n^3+5n^2+n-12$.

n) $-5n^3-2n^2-12n-3$.

o) $4n^2-n+1$.

p) $\dfrac{n^3}{n^2}$.

q) $n^2+3^n+4-\dfrac{1}{n}$.

Exercice 4. B

On suppose que la suite convergente (u_n) vérifie, pour tout entier naturel n la proposition (E) donnée ci-dessous. Déduisez-en la limite ℓ de (u_n). *Ainsi lorsque* $u_n + 3 = 0$ *alors, en passant à la limite* $\ell + 3 = 0$ *et donc* $\ell = -3$.

a) (E) : $u_n + 1 = 3$.

b) (E) : $4u_n + 1 = 2$.

c) (E) : $5u_n + 3 = 6u_n - 3$.

d) (E) : $u_n^2 = 1$.

e) (E) : $\dfrac{1}{n} + 2u_n^2 = n^{-2}$.

f) (E) : $(u_n - 1)(u_n + 3) = \dfrac{\frac{1}{n} + 1}{n!}$.

g) (E) : $\dfrac{2u_n + 1}{3u_n - 6} = \dfrac{4}{n^2 + n + 1}$.

h) (E) : $\dfrac{u_n - 2}{2u_n + 1} = u_n - 2$.

Exercice 5. C

1. Donnez le terme général des suites extraites de rang pair puis impairs. *Si* $u_n = n^2$ *alors les termes de rang pair sont les* $u_{2n} = (2n)^2$. *Et ceux de rang impair sont* $u_{2n+1} = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.

   a) $u_n = n + 1$.

   b) $u_n = \ln(n)$.

   c) $u_n = n!$.

2. Déterminez les limites des suites extraites des termes de rangs pairs puis impairs. Concluez quand à la limite de la suite.

   a) $(-1)^n$.

   b) $\dfrac{(-1)^n}{n}$

   c) $2 + \dfrac{4\left(1 - (-1)^n\right)}{n^2}$.

   d) $2^n + (-1)^n$.

   e) $\dfrac{1}{2^n} + (-1)^n$.