06 Limite d'une suite.

I Suite.

Une suite est une énumération ordonnée infinie dont les termes sont indexés sur $\mathbb{N}$ (ou une partie infinie de $\mathbb{N}$).

Ainsi les entiers naturels pairs forment une suite : $(0;2;4;6;\dots)$. En appelant u la suite on note u_0 le premier terme c'est-à-dire 0, puis u_1 le deuxième c'est-à-dire 2. Ainsi : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, etc. On généralise en donnant une *formule explicite* : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n$. Nous aurions pu définir la suite de façon *récursive* en partant de $u_0 = 0$ et en ajoutant 2 pour obtenir le terme suivant.

II Limite finie d'une suite.

Nous dirons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie lorsque, à mesure que n grandi, les valeurs de u_n se rapprochent d'un nombre fixe.

Définition 1

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite,

. $\ell \in \mathbb{R}$ un réel.

Nous dirons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ si et seulement si : quelque soit l'intervalle ouvert contenant ℓ, il contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
Dans ce cas nous noterons :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et que tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, sont positifs nous noterons $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$.

De même si la suite tend vers 0 en prenant des valeurs négatives nous noterons : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^-$.

Proposition 1

$$\left[u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\right] \Leftrightarrow \left[|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right].$$

III Limite infinie d'une suite.

Nous dirons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite infinie lorsque, à mesure que n grandi, les valeurs de u_n soit augmentent toutes, soit diminuent toutes, sans aucune limitation.

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $+\infty$ si et seulement si, : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Dans ce cas nous noterons :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Nous définirions de même $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

IV Unicité de la limite.

Nous adjoindrons à $\mathbb{R}$ les deux infinis comme s'il s'agissait de nombres. Ce nouvel ensemble, $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$, est appelé $\mathbb{R}$ achevé. Nous pourrons nous autoriser à étendre les opérations et l'ordre de l'ensemble des réels : $3+(+\infty)=+\infty$, $-2\times(+\infty)=-\infty$, $-\infty<-2<0<5<+\infty$. Par contre les opérations $\frac{+\infty}{+\infty}$, $(+\infty)-(+\infty)$ n'ont pas de sens. Nous en parlerons comme de formes indéterminées.

Proposition 2 - Unicité de la limite.

Soient

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,

. ℓ_1 et ℓ_2 des éléments de $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limites ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1=\ell_2$.

Corollaire 1

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la même limite.

En particuliers les suites des termes de rangs pairs et impairs admettent la même limite.

V Suites de référence.

Ces suites constituent notre alphabet de l'étude de la convergence.
On définit n factoriel, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $n! := 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et $0! := 1$.

Proposition 3

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$.

(i) Si $b > 0$ alors $n^b \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(ii) Si $b < 0$ alors $n^b \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0^+$.

(iii) Si $a > 1$ alors $a^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iv) Si $0 < a < 1$ alors $a^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0^+$.

(v) $n! \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(vi) $\ln(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Les suites constantes converge et leur limite est la valeur de leur terme général.

VI Opérations sur les suites convergentes.

Si la suite (u_n) admet une limite ℓ alors $(-u_n)$ admet pour limite $-\ell$.

Somme.

v_n \ u_n	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
m	$m+\ell$	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	F.I.
P.L.	P.L.	F.I.	F.I.	F.I.

Produit.

v_n \ u_n	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
$m > 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
$m = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.	P.L.
$m < 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$-\infty$	$+\infty$	P.L.
$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.
P.L.	P.L.	P.L.	P.L.	F.I.	F.I.	F.I.

Inverse.

u_n	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\dfrac{1}{u_n}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$

Les limites de quotients s'en déduisent.

VII Exercices.

Exercice 1. A

Donnez les limites des suites suivantes dont on donne le terme général, u_n, après avoir identifier une suite de référence.

a) n^4.
b) $\dfrac{1}{n^3}$.
c) 2^n.
d) $\dfrac{1}{2^n}$.
e) $n!$.
f) $\ln(n)$.
g) n^{-7}.
h) n.
i) n^{-2}.
j) $0,3^n$.
k) 10^n.
l) $\dfrac{1}{n^7}$.
m) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
n) e^n.
o) $\dfrac{1}{n^{-2}}$.

Exercice 2. B

Identifier parmi les suites dont le terme général est donné ci-après, les situations conduisant à une forme indéterminée lors de l'étude de la convergence, sinon donnez la limite.

On peut schématiquement résumer les formes indéterminées par :

$$(+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty), \quad 0\times\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{}{0^?}.$$

a) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2^n}$.
b) n^2-6^n.
c) $\ln(n^{-1})+n!$.
d) $2^{-n}+\ln(n)$.
e) $n^{12}+\dfrac{1}{n^{100}}$.
f) $\dfrac{1}{\ln(n)}+n!+1$.
g) $n^2 3^n$.
h) $\dfrac{n^2}{n^{12}}$.
i) $\dfrac{n!}{2^n}$.
j) $n^{-2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$.
k) $\dfrac{n^{-3}}{\ln(n)}$.
l) $n^5 2^{-n}$.
m) $n^{-3}+0,5^n\ln(n)$.
n) $\dfrac{1}{n^4}\times\mathrm{e}^n+4$.
o) $\dfrac{\ln(n)}{\mathrm{e}^n}$.

Exercice 3. B

Déterminez, si possible la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) $n^7 + 12$.

b) $4^n - 7$.

c) $n^3 + \dfrac{0,1^n}{\ln(n)}$.

d) $\dfrac{1}{n} + 4$.

e) $n^{-4} + \ln(n)$.

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2 + \dfrac{1}{n^2}$.

g) $n!n^2 + 2 - \dfrac{1}{n^2}$.

h) $\dfrac{\ln(n)}{2 + \mathrm{e}^{-n}}$.

i) $\dfrac{n^4 + 1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 4}$.

j) $\dfrac{n \times 2^n}{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$.

k) $n! - \left(2 - n^2\right)$.

l) $n^2\left(n^3 + \dfrac{3}{\ln(n)} + 1\right)$.

m) $2n^3 + 5n^2 + n - 12$.

n) $-5n^3 - 2n^2 - 12n - 3$.

o) $4n^2 - n + 1$.

p) $\dfrac{n^3}{n^2}$.

q) $n^2 + 3^n + 4 - \dfrac{1}{n}$.

Exercice 4. B

On suppose que la suite convergente (u_n) vérifie, pour tout entier naturel n la proposition (E) donnée ci-dessous. Déduisez-en la limite ℓ de (u_n). *Ainsi lorsque* $u_n + 3 = 0$ *alors, en passant à la limite* $\ell + 3 = 0$ *et donc* $\ell = -3$.

a) $(E): \quad u_n + 1 = 3$.

b) $(E): \quad 4u_n + 1 = 2$.

c) $(E): \quad 5u_n + 3 = 6u_n - 3$.

d) $(E): \quad u_n^2 = 1$.

e) $(E): \quad \dfrac{1}{n} + 2u_n^2 = n^{-2}$.

f) $(E): \quad (u_n - 1)(u_n + 3) = \dfrac{\dfrac{1}{n} + 1}{n!}$.

g) $(E): \quad \dfrac{2u_n + 1}{3u_n - 6} = \dfrac{4}{n^2 + n + 1}$.

h) $(E): \quad \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 1} = u_n - 2$.

Exercice 5. C

1. Donnez le terme général des suites extraites de rang pair puis impairs. *Si $u_n = n^2$ alors les termes de rang pair sont les $u_{2n} = (2n)^2$. Et ceux de rang impair sont $u_{2n+1} = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.*

   a) $u_n = n + 1$. b) $u_n = \ln(n)$. c) $u_n = n!$.

2. Déterminez les limites des suites extraites des termes de rangs pairs puis impairs. Concluez quand à la limite de la suite.

   a) $(-1)^n$. b) $\dfrac{(-1)^n}{n}$ c) $2 + \dfrac{4\left(1-(-1)^n\right)}{n^2}$.

   d) $2^n + (-1)^n$. e) $\dfrac{1}{2^n} + (-1)^n$.