05 Fonctions.

I Notion de fonction.

II Fonctions de référence.

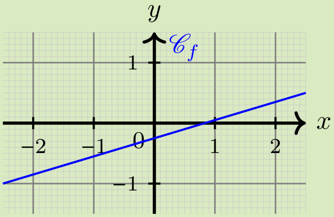
III Propriétés algébriques de $\ln$ et $\exp$.

IV Exercices.

Exercice 1. A

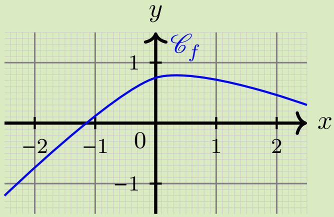
Donnez par lecture graphique l'image de a et l'ensemble des antécédents de b par la fonction f dont la courbe représentative est donnée.

a)



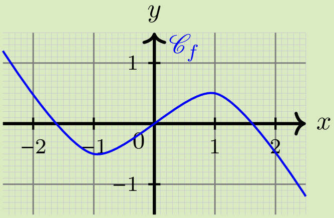
$a = 1$ et $b = -1$.

b)



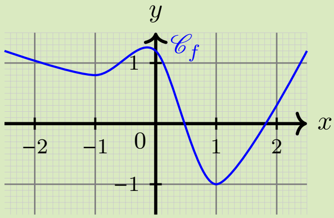
$a = -2$ et $b = -0.5$.

c)



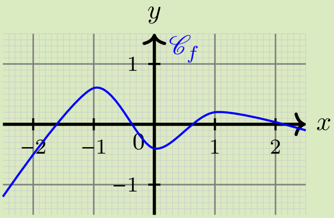
$a = 1$ et $b = 0,5$.

d)



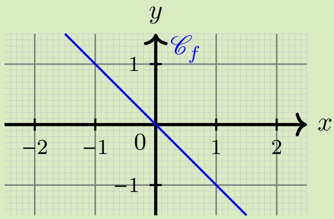
$a = 0$ et $b = 1$.

e)



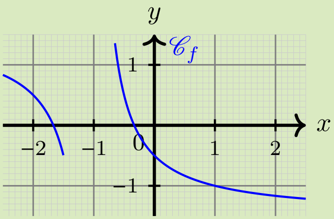
$a = -2$ et $b = 1$.

f)



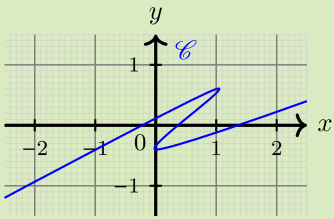
$a = 0$ et $b = 0$.

g)



$a = -1$ et $b = -1$.

h)



$a = 0,5$ et $b = 1$.

Exercice 2. A

Calculez l'image de a et l'ensemble des antécédents de b par la fonction f dont l'expression algébrique est donnée.

a) $f : x \mapsto -3x$, $a = -2$ et $b = -1$.

b) $f : x \mapsto 7x + 1$, $a = \frac{1}{7}$ et $b = -3$.

c) $f : x \mapsto x^2$, $a = -2$ et $b = 4$.

d) $f : x \mapsto x^2$, $a = 7$ et $b = -1$.

e) $f : x \mapsto (x-1)^2$, $a = -3$ et $b = 0$.

f) $f : x \mapsto (x-2)(x+1)$, $a = 4$ et $b = 0$.

g) $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$, $a = 1$ et $b = 0$.

h) $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$, $a = \mathrm{e}$ et $b = -1$.

i) $f : x \mapsto \ln\left(\frac{3x+1}{5-2x}\right)$, $a = 0$ et $b = 0$.

j) $f : x \mapsto \ln(x+3)$, $a = -2$ et $b = 1$.

Exercice 3. A

Donnez le sens de variation de la fonction affine f sans tracé ni calcul, puis tracez une représentation graphique. *Les courbes représentatives de fonctions affines sont des droites.*

a) $f : x \mapsto 2x$.

b) $f : x \mapsto 0,5x - 1$.

c) $f : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x + 1$.

d) $f : x \mapsto 100x - 50$.

e) $f : x \mapsto 4 - 3x$.

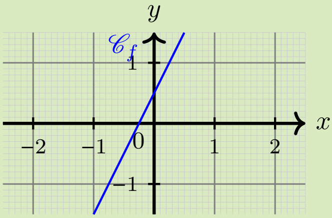
f) $f : x \mapsto \dfrac{6x+4}{2}$.

g) $f : x \mapsto \dfrac{5-3x}{2}$.

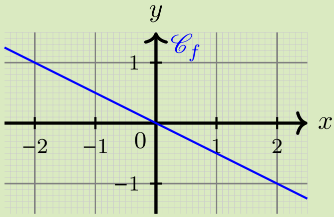
Exercice 4. A

Déterminez par lecture graphique le coefficient directeur est l'ordonnée à l'origine de la fonction affine f dans les cas suivants.

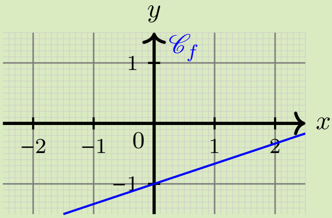
a)



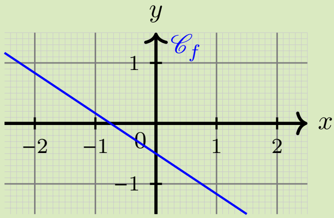
b)



c)



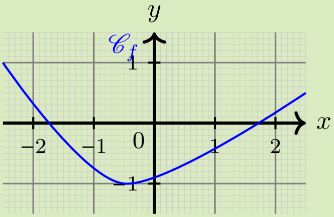
d)



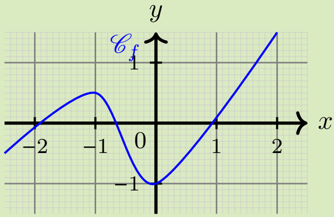
Exercice 5. A

Donnez le tableau de variation de la fonction à partir de la représentation graphique proposée.

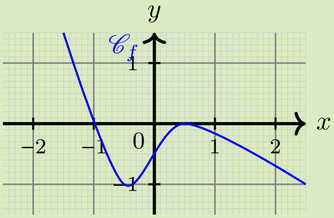
a)



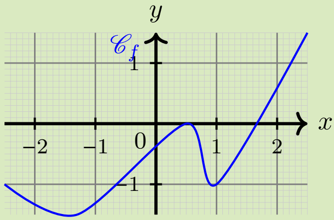
b)



c)



d)



Exercice 6. B

On appelle fonction identité la fonction linéaire dont le coefficient directeur est 1. On note $Id : x \mapsto x$.
Tracez la courbe représentative de la fonction identité et précisez ses variations.

Exercice 7. B

Tracez à main levée les courbes représentatives des fonctions de références en indiquant les éléments remarquables.

Exercice 8. B

Calculez l'image de a et l'ensemble des antécédents de b par la fonction f dont l'expression algébrique est donnée.

a) $f : x \mapsto x^2 - x - 12$, $a = -2$ et $b = -1$.

b) $f : x \mapsto x^2 - x$, $a = -1$ et $b = 1$.

c) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x}$, $a = 0$ et $b = 3$.

d) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 5\mathrm{e}^{x} + 6$, $a = 1$ et $b = 0$.

Correction de l'exercice 8

a)

* Calculons $f(-2)$.

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 - (-2) - 12 \\ &= 4 + 2 - 12 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(-2) = -6.}$$

* Résolvons l'équation $f(x) = -1$.

$$f(x) = -1$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x^2 - x - 12 &= -1 \\ x^2 - x - 11 &= 0 \end{aligned}$$

Il faut donc chercher les racines du trinôme $x^2 - x - 11$. Son discriminant est $(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-11) = 45 > 0$ donc il existe deux racines réelles distinctes : $\frac{-(-1)-\sqrt{45}}{2\times 1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}$ et $\frac{-(-1)+\sqrt{45}}{2\times 1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

$$\boxed{f^{-1}(\{-1\}) = \left\{\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\sqrt{5}; \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\sqrt{5}\right\}.}$$

b)

* Calculons $f(-1)$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - (-1) \\ &= 1 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(-1) = 2.}$$

* Résolvons l'équation $f(x) = 1$.

$$f(x) = 1$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x^2 - x &= 1 \\ x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Il faut donc chercher les racines du trinôme $x^2 - x - 1$. Son discriminant est $(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc il existe deux racines réelles distinctes : $\frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{f^{-1}(\{1\}) = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}.}$$

c)

* Calculons $f(0)$.

$$\begin{aligned} f(0) &= \mathrm{e}^{2\times 0} + 2\mathrm{e}^{0} \\ &= 1 + 2 \times 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(0) = 3.}$$

* Résolvons l'équation $f(x) = 3$.

$$f(x) = 3$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} &= 3 \\ \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} - 3 &= 0 \end{aligned}$$

En posant $Y = \mathrm{e}^{x}$:

$$Y^2 + 2Y - 3 = 0$$

Il faut donc chercher les racines du trinôme $Y^2 - Y - 1$. Son discriminant est $2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$ donc il existe deux racines réelles distinctes : $\frac{-1-\sqrt{16}}{2\times 1} = -\frac{5}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{3}{2}$.
Or $Y = \mathrm{e}^{x}$ et $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc la seule solution possible est $\mathrm{e}^{x} = \frac{3}{2}$.

$$\boxed{f^{-1}(\{3\}) = \left\{\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right\}.}$$

d)

* Calculons $f(1)$.

$$f(1) = e^{2\times 1} + 5e^{1} + 6$$

$$\boxed{f(1) = e^{2} + 5e + 6.}$$

* Résolvons l'équation $f(x) = 3$.

$$f(x) = 0$$

équivaut successivement à :

$$e^{2x} + 5e^{x} + 6 = 0$$

En posant $Y = e^{x}$:

$$Y^{2} + 5Y + 6 = 0$$

Il faut donc chercher les racines du trinôme $Y^{2} + 5Y + 6$. Son discriminant est $5^{2} - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ donc il existe deux racines réelles distinctes : $\frac{-5-\sqrt{1}}{2\times 1} = -3$ et $\frac{-5+\sqrt{1}}{2\times 1} = -2$.
Or $Y = e^{x}$ et $e^{x} > 0$ donc aucune des deux précédentes solutions n'est possible.

$$\boxed{f^{0}(\{3\}) = \varnothing.}$$