05 Fonctions.

I Notion de fonction.

La fonction permet de modéliser une situation dans laquelle à chaque valeur on associe au plus une valeur. Ainsi associer à l'âge les revenus moyens c'est définir une fonction ; à tous les bas-âge on associe le même revenu nul ; à 130 ans n'est associé aucun revenu.

Soient E et F des ensembles. On appelle *fonction f de E dans F*, et on note $f : E \to F$ un procédé qui à certains éléments de E associe, à chaque élément, au plus un élément de F.

Comme vous l'avez vu au collège la proportionnalité est modélisé par une fonction linéaire.

L'élément associé à un élément x de E est appelé *l'image de x* et est noté $f(x)$. x est appelé *un antécédent* de $f(x)$.

Ainsi pour une fonction linéaire $f : x \mapsto ax$ ou $f(x) = ax$.

L'ensemble des couples $(x, f(x))$ est appelé *le graphe* de f est une partie de $E \times F$.

Pour une fonction linéaire le graphe est donc $\{(x, ax) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

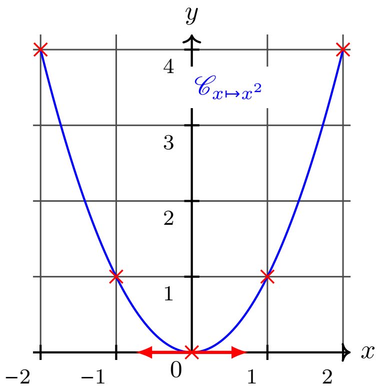
Le *domaine de définition* d'une fonction $f : E \to F$ souvent noté $\mathscr{D}_f$ est l'ensemble des éléments de E qui ont une image par f.

Pour une application linéaire tous les nombres de l'ensemble de départ ont une image donc le domaine de définition d'une application linéaire est $\mathbb{R}$. La fonction inverse n'a pas d'image pour 0 don son domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

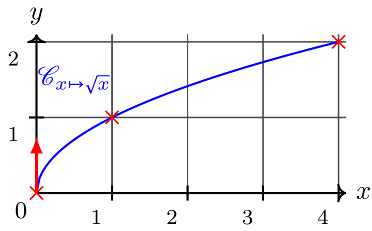
De façon générale on appelle *application* une fonction dont le domaine de définition est E tout entier.

II Fonctions de référence.

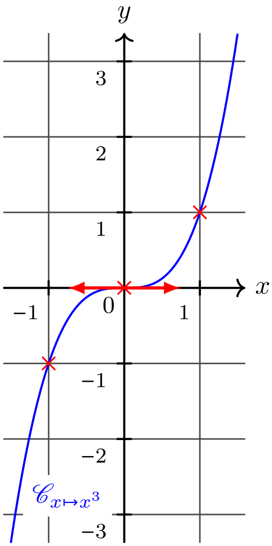
Les courbes représentatives des fonctions de référence sont à connaître par cœur.



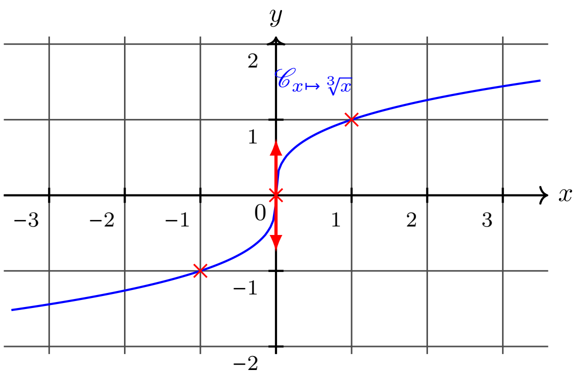
y
x
$\mathscr{C}_{x\mapsto x^2}$
4
3
2
1
0
−2
−1
1
2



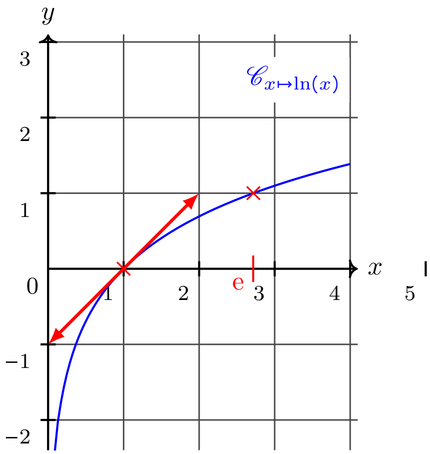
y
x
$\mathscr{C}_{x\mapsto \sqrt{x}}$
2
1
0
1
2
3
4

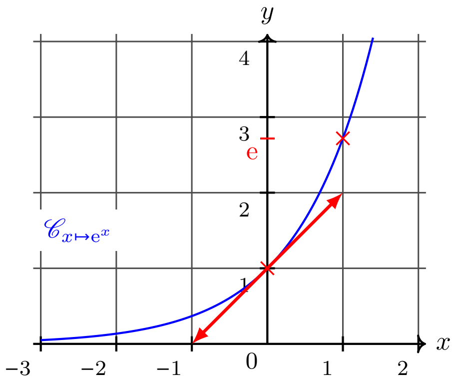


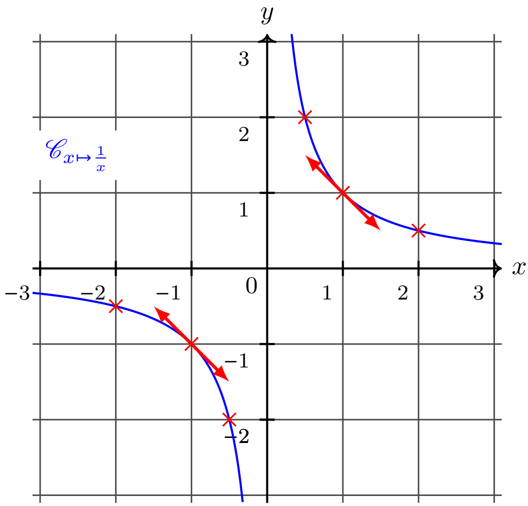
y
x
3
2
1
0
−1
1
−1
−2
−3
$\mathscr{C}_{x\mapsto x^3}$



y
x
2
$\mathscr{C}_{x\mapsto \sqrt[3]{x}}$
1
0
−3
−2
−1
1
2
3
−1
−2







III Propriétés algébriques de $\ln$ et $\exp$.

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (éventuellement strictement positifs) et $n \in \mathbb{Z}$,

$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.	$e^{a+b} = e^a \times e^b$.
$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.
$\ln(a^n) = n\ln(a)$.	$e^{na} = (e^a)^n$.
$\ln(a^b) = b\ln(a)$.	$e^{a\times b} = (e^a)^b$.

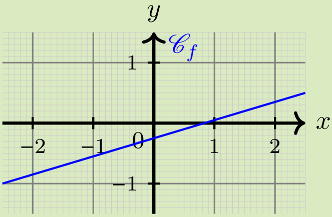
On pourra retenir que ln "transforme" les multiplications en additions et exp "transforme" les additions en multiplications.

IV Exercices.

Exercice 1. A

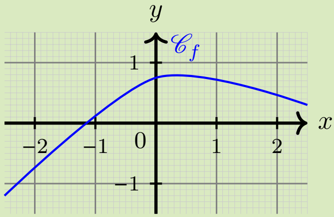
Donnez par lecture graphique l'image de a et l'ensemble des antécédents de b par la fonction f dont la courbe représentative est donnée.

a)



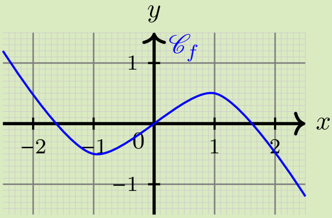
$a = 1$ et $b = -1$.

b)



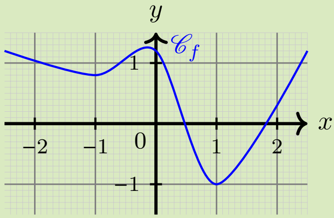
$a = -2$ et $b = -0.5$.

c)



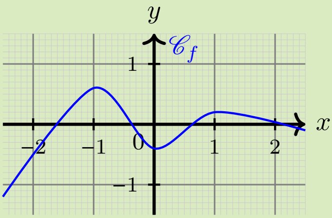
$a = 1$ et $b = 0,5$.

d)



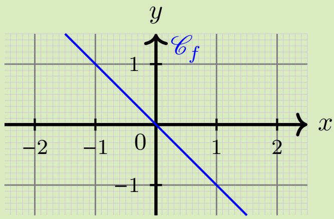
$a = 0$ et $b = 1$.

e)



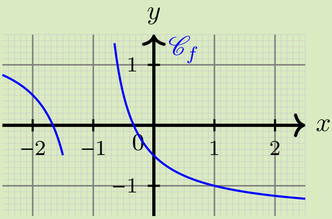
$a = -2$ et $b = 1$.

f)



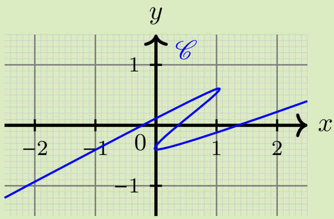
$a = 0$ et $b = 0$.

g)



$a = -1$ et $b = -1$.

h)



$a = 0,5$ et $b = 1$.

Exercice 2. A

Calculez l'image de a et l'ensemble des antécédents de b par la fonction f dont l'expression algébrique est donnée.

a) $f : x \mapsto -3x$, $a = -2$ et $b = -1$.

b) $f : x \mapsto 7x + 1$, $a = \frac{1}{7}$ et $b = -3$.

c) $f : x \mapsto x^2$, $a = -2$ et $b = 4$.

d) $f : x \mapsto x^2$, $a = 7$ et $b = -1$.

e) $f : x \mapsto (x-1)^2$, $a = -3$ et $b = 0$.

f) $f : x \mapsto (x-2)(x+1)$, $a = 4$ et $b = 0$.

g) $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$, $a = 1$ et $b = 0$.

h) $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$, $a = \mathrm{e}$ et $b = -1$.

i) $f : x \mapsto \ln\left(\frac{3x+1}{5-2x}\right)$, $a = 0$ et $b = 0$.

j) $f : x \mapsto \ln(x+3)$, $a = -2$ et $b = 1$.

Exercice 3. A

Donnez le sens de variation de la fonction affine f sans tracé ni calcul, puis tracez une représentation graphique. *Les courbes représentatives de fonctions affines sont des droites.*

a) $f : x \mapsto 2x$.

b) $f : x \mapsto 0,5x - 1$.

c) $f : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x + 1$.

d) $f : x \mapsto 100x - 50$.

e) $f : x \mapsto 4 - 3x$.

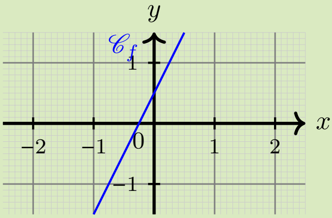
f) $f : x \mapsto \dfrac{6x+4}{2}$.

g) $f : x \mapsto \dfrac{5-3x}{2}$.

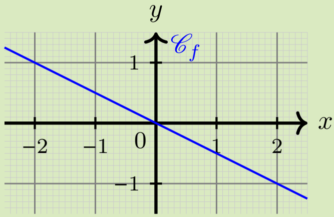
Exercice 4. A

Déterminez par lecture graphique le coefficient directeur est l'ordonnée à l'origine de la fonction affine f dans les cas suivants.

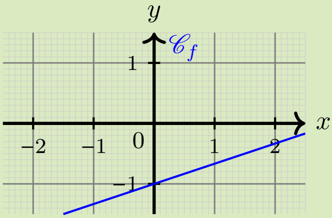
a)



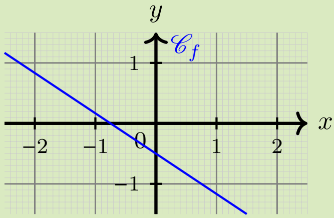
b)



c)



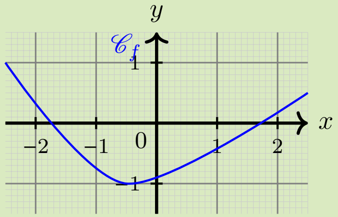
d)



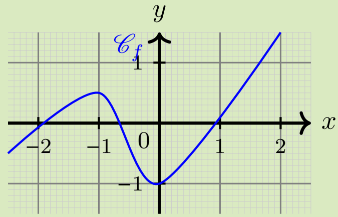
Exercice 5. A

Donnez le tableau de variation de la fonction à partir de la représentation graphique proposée.

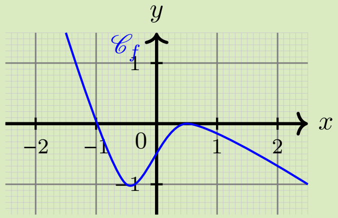
a)



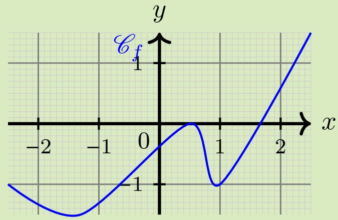
b)



c)



d)



Exercice 6. A

Exercice 7. B

Tracez à main levée les courbes représentatives des fonctions de références en indiquant les éléments remarquables.

Exercice 8. B

Exercice 9. C

On appelle fonction identité la fonction linéaire dont le coefficient directeur est 1.
On note $Id : x \mapsto x$.
Tracez la courbe représentative de la fonction identité et précisez ses variations.

Exercice 10. C

Calculez l'image de a et l'ensemble des antécédents de b par la fonction f dont l'expression algébrique est donnée.

a) $f : x \mapsto x^2 - x - 12$, $a = -2$ et $b = -1$.

b) $f : x \mapsto x^2 - x$, $a = -1$ et $b = 1$.

c) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x}$, $a = 0$ et $b = 3$.

d) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 5\mathrm{e}^{x} + 6$, $a = 1$ et $b = 0$.

Exercice 11. C