04 Événements aléatoires.

Dans cette leçon on ne calcul pas de probabilité on apprend à décrire les expériences aléatoires avec les bons outils qui permettront ultérieurement de faire des calculs.

I Espace probabilisable.

Pour modéliser une expérience aléatoire on donne un *univers*, noté le plus souvent Ω, qui est l'ensemble de toutes les issues (résultats) de l'expérience aléatoire.

Ainsi pour un lancé de dé à 6 faces : $\Omega_1 = [\![1,6]\!]$. Tandis que si l'expérience consiste à noter le nombre de pile-ou-face nécessaires pour obtenir pour la première fois un pile nous choisirons $\Omega_2 = \mathbb{N}^*$.

Cependant le plus souvent ce ne sont pas les issues mais un ensemble d'issues qui nous intéressent. Un sous-ensemble de l'univers Ω est appelé un *événement* (le plus souvent). L'ensemble des événements associé à un univers, $\mathscr{E}$, est appelé *une tribu*. Une tribu doit vérifier trois conditions : $\mathscr{E}$ doit contenir Ω, être stable par passage au complémentaire et être stable par union dénombrable. Très souvent nous choisirons $\mathscr{E} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Ainsi pour le lancé de dé à 6 faces « Obtenir un nombre pair » est un événement que nous pouvons définir en extension par $\{2;4;6\} \subset \Omega_1$. Nous dirons que l'événement est *réalisé* par les issues 2 , 4 et 6.

Pour le pile-ou-face répété, l'événement « Obtenir un pile en moins de 4 lancés. » est $\{1;2;3\} \subset \Omega_2$.

II Les événements.

Notons, pour illustrer notre propos, A : « Obtenir un nombre pair. » et B : « Obtenir un nombre supérieur ou égale à 3 lors d'un lancé de dé à 6 faces.

Dire qu'une issue ω réalise, en même temps, les événements *A et B* signifie que $\omega \in A$ et $\omega \in B$. Autrement dit $\omega \in A \cap B$.

Avec notre exemple l'événement « Obtenir un nombre pair et supérieur ou égale à 3 » est $A \cap B = \{4;6\}$.

Dire qu'une issue ω réalise les événements *A ou B* (au moins l'un des deux) signifie que $\omega \in A$ ou $\omega \in B$. Autrement dit $\omega \in A \cup B$.

Avec notre exemple l'événement « Obtenir un nombre pair ou supérieur ou égale à 3 » est $A \cup B = \{2;4;5;6\}$.

Une réunion d'une suite d'événements est encore un événement.

Dire que A n'est pas réalisé, « Ne pas obtenir un nombre pair », c'est dire que $\overline{A}$ est réalisé. $\overline{A}$ est appelé *l'événement contraire* de A.

$\varnothing$ est appelé un *événement impossible*, Ω un *événement certain*.

Les événements réalisés par une seule issue sont appelés des événements élémentaires. On confond souvent issues et événements élémentaires.

III Système complet d'événements.

Considérons le tirage d'une boule d'une urne. Il y a 1000 boules numérotées de 1 à 1000. Les boules de 1 à 200 sont bleues, celles de 201 à 600 sont rouges et celles de 601 à 1000 sont vertes. Nous ne nous intéressons qu'à la couleur de la boule tirée. L'univers comporte 1000 issues mais ce qui nous intéresse se sont uniquement les trois événements B, R et V. Ces trois événements suffisent pour décrire toute l'expérience (du point de vu de la couleur). Les événements B, R et V constituent un système complet d'événements : réunis il regroupe toutes les issues de l'expérience et aucune issues n'est en doublon dans ces événements.

Nous retrouverons très souvent cette situation à mesure que les univers se compliqueront.

Définition 1

Soient :

. Ω un univers,

. $\mathscr{E}$ une tribu sur Ω,

. $\mathscr{P}$ une famille d'événements appartenant à la tribu $\mathscr{E}$.

Nous dirons que $\mathscr{P}$ est *une famille complète d'événements* si l'une et l'autre conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\forall A \in \mathscr{P},\ \forall B \in \mathscr{P},\ A \neq B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$.

(ii) $\bigcup_{A \in \mathscr{P}} A = \Omega$.

IV Exercices.

Exercice 1. A

Proposez un univers pour chacune des expériences aléatoires décrites ci-dessous, puis indiquez une issue et un événement qui ne soit ni l'événement certain ni l'événement impossible.

a) Lancé d'une pièce.

b) Lancer un dé à 20 faces numérotés de 1 à 20.

c) Dans une urne contenant des boules rouges et vertes, tirer une boule.

d) Lancer 3 fois une pièce.

e) Dans un appartement, une mouche se déplace au hasard entre le salon, la chambre, la salle de bain et la cuisine.

f) Une fourmille se déplace de sommet en sommet sur un cube $ABCDEFGH$.

Exercice 2. A

1. On lance un dé à six faces. Décrivez par une phrase en français les événements proposés.

   a) $\{1;2;3\}$.

   b) $\{1;3;5\}$.

   c) $\{1;2;3;4;5\}$.

   d) $\{1;2;3\} \cup \{6\}$.

   e) $\{1;2;3\} \cap \{1;3;5\}$.

   f) $\{1;2;3\} \cap \{1;2;3;4;5\}$.

Exercice 3. A

Proposez un univers pour chacune des expériences aléatoires décrites ci-dessous.

a) Le temps d'attente d'un client à une caisse de commerce en minutes.

b) Compter le nombre de piles obtenus lors de la répétition d'un pile-ou-face 15 fois.

c) Une voiture produite dans une usine présente des défauts ou pas.

d) Les 4 voitures qui sont produites dans une usine présentent des défauts ou pas.

e) Une fourmi se déplace sur les mailles carrées d'un filet de pêche de nœud en nœud.

Exercice 4. B

Démontrez que A et $\overline{A}$ forment un famille complète d'événements.

Exercice 5. B

Exercice 6. B

On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. On note pour $i \in \mathbb{N}^*$, A_i : « On obtient le premier face au i-ème lancer » et A_0 :« On n'obtient jamais face ».
Montrer que $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.

Exercice 7. B

Exercice 8. B

Une expérience consiste à lancer indéfiniment une pièce. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n : « Obtenir un pile lors du n-ième lancé. » et A_n : « N'obtenir que des piles lors des n premiers lancés. »
Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}$' $A_{n+1} \subset A_n$.

Exercice 9. B

Une expérience consiste à lancer indéfiniment une pièce. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n : « Obtenir un pile lors du n-ième lancé. » et E_n : « Le premier pile apparaît lors du n-ième lancé. »
Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}$' $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} P_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} E_i$.

Exercice 10. C

Proposez une tribu simple pour modéliser les expériences suivantes.

a) Dans un lycée parmi les 400 élèves de classes préparatoires, dont 250 économiques et 150 littéraires on choisit au hasard un élève. On note S_1 l'événement « l'élève choisi est en voie économique ». Et l'on souhaite calculer la probabilité de S_1.

Exercice 11. D

1. $\varnothing$ et Ω forment une tribu de Ω.

Exercice 12.

On lance une pièce une infinité de fois. On note pour $n \geqslant 3$, B_n l'événement « on obtient face au $(n-2)$-ème lancer, pile au $(n-1)$-ème lancer et pile au n-ème lancer ».
Pour $n \geqslant 3$, les événements B_n et B_{n+2} sont-ils incompatibles ?

Exercice 13.

On dispose d'une urne avec 3 boules : une bleue, une verte et une rouge. On tire une boule dans l'urne :

- Si elle est verte, on perd 5 euros.
- Si elle est bleue, on joue à pile ou face : on gagne 10 euros si on fait face, et on perd 10 euros si on fait pile.
- Si elle est rouge, on gagne 3 euros.

On note V : « on obtient la boule verte », B : « On obtient la boule bleue » , R : « On obtient la boule rouge », F : « On fait face au jeu pile ou face », et G : « On gagne de l'argent ».
Justifiez que $G = (B \cup F) \cup R$.