

03 Union, intersection, produit cartésien.

I Union.

II Intersection.

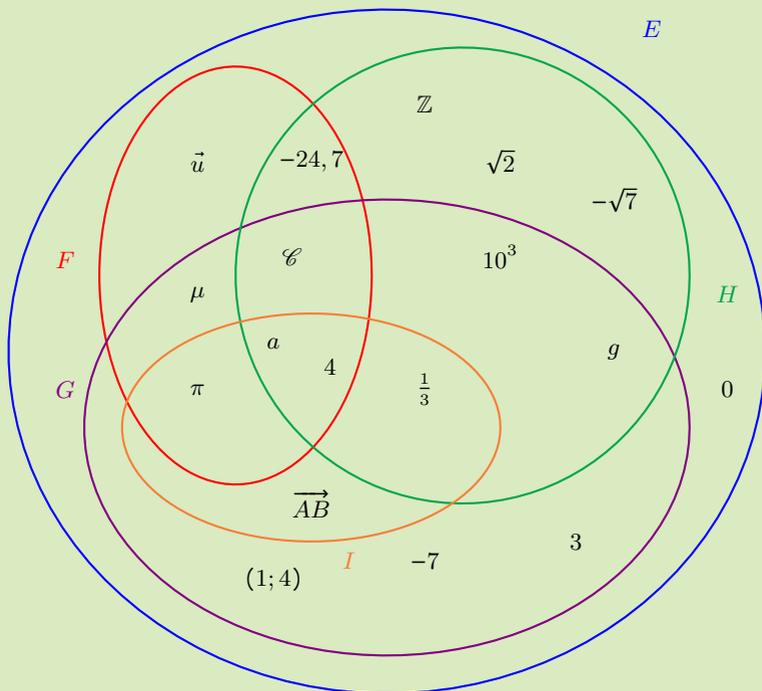
III Propriétés des intersections et unions.

IV Produit cartésien.

V Exercices.

Exercice 1. A

Sont dessinés ci-dessous des ensembles E , F , G , H et I ainsi que les éléments qu'ils contiennent.



Donnez une définition en extension des ensembles \overline{G} , $F \cap G$, $F \cap H$, $F \cap I$, $I \cap G$, $F \cap H \cap G$ et $F \cap H \cap I$.

Exercice 2. B

Déterminez les intersections et unions des ensembles E et F dans les cas suivants.

- a) $E = \{1; 4; -1\}$ et $F = \{-6; 1; 4\}$. b) $E = \{1; 2\}$ et $F = \{3; 4\}$.
 c) $E = [-2; 3]$ et $F = [1; 7]$. d) $E =]-\infty; -3]$ et $F =]-6; 2[$.
 e) $E =]-\infty; 5]$ et $] - 6; +\infty[$. f) $E =]2; 6]$ et $F = [3; 4]$.
 g) $E = [2; +\infty[$ et $F = [0; 2[$. h) $E =]-\infty; 1]$ et $F = [1; 4[$.
 i) $E = \{2; 3\}$ et $F = [1; 3[$. j) $E = \{0\}$ et $F =]-1; 1[$.
 k) $E = [1; 4[$ et $F = \mathbb{Z}$. l) $E =]-\infty; 5[$ et $F = \mathbb{N}$.

Exercice 3. A

Déterminez l'intersection de l'ensemble des rectangles et l'ensemble des losanges.

Exercice 4. B

1. Illustrez par des diagrammes de Venn les égalités suivantes.

- a) $F \cap (G \cup H) = (F \cap G) \cup (F \cap H)$.
 b) $F \cup (G \cap H) = (F \cup G) \cap (F \cup H)$.
 c) $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$.
 d) $\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}$.

2. On appelle *différence des ensembles* F et G l'ensemble $F \setminus G := \{x \in F \mid x \notin G\}$.
 Illustrez par un diagramme de Venn l'ensemble $F \setminus G$.

3. On appelle différence symétrique des ensembles F et G l'ensemble $F \Delta G := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Illustrez par un diagramme de Venn l'ensemble $F \Delta G$.

Exercice 5. B

Donnez une définition en extension du produit cartésien $E \times F$ avec $E = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $F = \{-3, 7\}$.

Exercice 6. C

En raisonnant géométriquement et sans justifier donnez l'ensemble des solutions des équations et inéquations suivantes.

- a) $|x + 3| > 2$. b) $|x - 5| \geq 1$.
 c) $|2 - x| \leq 6$. d) $|x - 7| \geq 2$.
 e) $|x + 1| < -2$. f) $|x + 3| > 2$.

Exercice 10. D

Déterminez si les ensembles E et F suivants sont égaux ou pas.

- a) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 1 = 7\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = 7y\}$.
- b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y + 3 = 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{2}{3}x - 1\}$.
- c) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$.

Exercice 11. E

Soient E un ensemble, A , B et C des parties de E .

Démontrez les propriétés suivantes :

- | | |
|---|--|
| a) $A \cup \emptyset = A$. | b) $A \cup A = A$. |
| c) $A \cup E = E$. | d) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$. |
| e) $A \cup B = B \cup A$. | f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. |
| g) $A \cap \emptyset = \emptyset$. | h) $A \cap A = A$. |
| i) $A \cap E = A$. | j) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$. |
| k) $A \cap B = B \cap A$. | l) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. |
| m) $\overline{\emptyset} = E$. | n) $\overline{E} = \emptyset$. |
| o) $\overline{\overline{A}} = A$. | p) $\overline{A} = E \setminus A$. |
| q) $A \setminus \emptyset = A$. | r) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$. |
| s) $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \setminus (A \cap B)$. | |

Exercice 12. E