03 Union, intersection, produit cartésien.

I Union.

Une phrase (assertion, proposition) en mathématique ne peut prendre que deux valeurs : soit vraie soit fausse, qui s'excluent mutuellement. Ainsi la phrase « $3 < 1$ » est fausse tandis que la phrase « $3 \geqslant 1$ » est vraie. La seconde phrase est d'ailleurs la négation de la première.

Deux phrases peuvent être assemblées avec le connecteur logique « ou » de façon a en créer une nouvelle. Les phrases P :« Je regarde un film. » et Q : « Je mange de la glace. » peuvent donner la nouvelle phrase $(P \,\text{ou}\, Q)$: « Je regarde un film ou je mange de la glace. ». Le « ou » en français est exclusif : c'est soit l'un soit l'autre, mais pas les deux en même temps. En mathématique le « ou » est inclusif : c'est soit l'un, soit l'autre, soit les deux en même temps. Ainsi, en mathématique, la phrase $(P \,\text{ou}\, Q)$ est vraie dès que l'une des phrases P ou Q, au moins, est vraie. Si je mange de la glace en regardant un film ma phrase est encore vraie. On représente cela par la table de vérité suivante.

Table de vérité de $(P \,\text{ou}\, Q)$.

P \ Q	Vraie	Fausse
Vraie	V	V
Fausse	V	F

Définition 1

Soient F et G des parties d'un ensemble E.

Nous appellerons union de F et G l'ensemble

$$F \cup G := \{x \in E \mid x \in F \text{ ou } x \in G\}.$$

II Intersection.

Un autre connecteur logique est le « et ». On le retrouve noté par une unique accolade par exemple dans les systèmes d'équations.

En reprenant l'exemple précédent P et Q signifie que je regarde un film en mangeant de la glace (en même temps).

Table de vérité de $(P$ et $Q)$.

$P \backslash Q$	Vraie	Fausse
Vraie	V	F
Fausse	F	F

Proposition 1 - Caractérisation de l'égalité d'ensemble.

Soient E et F des ensembles.

$[E = F] \Longleftrightarrow [E \subset F \text{ et } F \subset E]$.

Définition 2

Soient F et G des parties d'un ensemble E.

Nous appellerons intersection de F et G l'ensemble

$$F \cap G := \{x \in E \mid x \in F \text{ et } x \in G\}.$$

Si $A \cap B = \varnothing$, autrement dit si A et B n'ont aucun élément en commun, nous dirons que A et B sont *disjoints*.

III Propriétés des intersections et unions.

Proposition 2

Soit E un ensemble.

(i) L'intersection est distributive sur l'union :
$\forall F, G, H \subset E,\ F \cap (G \cup H) = (F \cap G) \cup (F \cap H)$.

(ii) L'union est distributive sur l'intersection :
$\forall F, G, H \subset E,\ F \cup (G \cap H) = (F \cup G) \cap (F \cup H)$.

(iii) Loi de De Morgan : $\forall F, G \subset E,\ \overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$.

(iv) Loi de De Morgan : $\forall F, G \subset E,\ \overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}$.

IV Produit cartésien.

Nous appellerons couple (x, y) d'éléments des ensembles E et F la donnée d'un élément x de E puis d'un élément y de F. C'est le cas, par exemple des coordonnées de points.

L'ensemble des couples d'éléments de E et de F est appelé le *produit cartésien* de E et F et est noté $E \times F$.

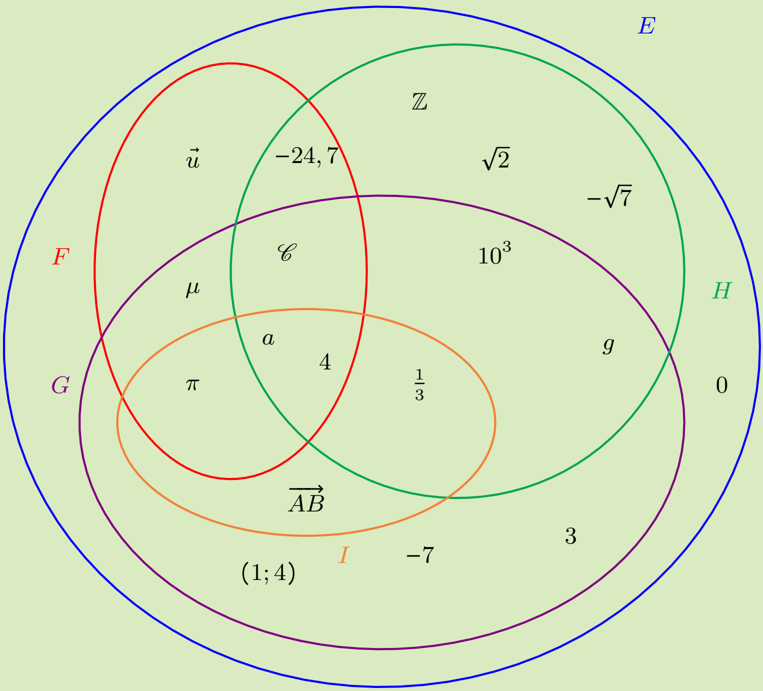
On généralise le produit cartésien à un nombre $n \in \mathbb{N}$ d'ensembles, $E_1, \ldots, E_n$. Les éléments de $E_1 \times \cdots \times E_n$ sont appelés des n-uplets ou n-listes.

Nous travaillerons tout particulièrement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que nous noterons respectivement $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ pour simplifier.

V Exercices.

Exercice 1. A

Sont dessinés ci-dessous des ensembles E, F, G, H et I ainsi que les éléments qu'ils contiennent.



Donnez une définition en extension des ensembles $\overline{G}$, $F \cap G$, $F \cap H$, $F \cap I$, $I \cap G$, $F \cap H \cap G$ et $F \cap H \cap I$.

Exercice 2. B

Déterminez les intersections et unions des ensembles E et F dans les cas suivants.

a) $E = \{1; 4; -1\}$ et $F = \{-6; 1; 4\}$.

b) $E = \{1; 2\}$ et $F = \{3; 4\}$.

c) $E = [-2; 3]$ et $F = [1; 7]$.

d) $E =]-\infty; -3]$ et $F =]-6; 2[$.

e) $E =]-\infty; 5]$ et $]-6; +\infty[$.

f) $E =]2; 6]$ et $F = [3; 4]$.

g) $E = [2; +\infty[$ et $F = [0; 2[$.

h) $E =]-\infty; 1]$ et $F = [1; 4[$.

i) $E = \{2; 3\}$ et $F = [1; 3[$.

j) $E = \{0\}$ et $F =]-1; 1[$.

k) $E = [1; 4[$ et $F = \mathbb{Z}$.

l) $E =]-\infty, 5[$ et $F = \mathbb{N}$.

Exercice 3. A

Déterminez l'intersection de l'ensemble des rectangles et l'ensemble des losanges.

Exercice 4. B

1. Illustrez par des diagrammes de Venn les égalités suivantes.
   a) $F \cap (G \cup H) = (F \cap G) \cup (F \cap H)$.
   b) $F \cup (G \cap H) = (F \cup G) \cap (F \cup H)$.
   c) $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$.
   d) $\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}$.
2. On appelle *différence des ensembles* F et G l'ensemble $F \setminus G := \{x \in F \mid x \notin G\}$.
   Illustrez par un diagramme de Venn l'ensemble $F \setminus G$.
3. On appelle différence symétrique des ensembles F et G l'ensemble $F \Delta G := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
   Illustrez par un diagramme de Venn l'ensemble $F \Delta G$.

Exercice 5. B

Donnez une définition en extension du produit cartésien $E \times F$ avec $E = [\![1, 3]\!]$ et $F = \{-3, 7\}$.

Exercice 6. C

En raisonnant géométriquement et sans justifier donnez l'ensemble des solutions des équations et inéquations suivantes.

a) $|x + 3| > 2$.

b) $|x - 5| \geqslant 1$.

c) $|2 - x| \leqslant 6$.

d) $|x - 7| \geqslant 2$.

e) $|x + 1| < -2$.

f) $|x + 3| > 2$.

Exercice 7. D

Donnez la négation de la phrase P. Rappelons que « $\forall$ » signifie « quel que soit » et « $\exists$ » signifie « il existe (au moins) un ».

a) P : « $x = 1$ ».

b) P : « $x \geqslant 2$ ».

c) P : « $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 3$ ».

d) P : « $\exists x \in]-\infty, 4[$ ».

e) P : « $\forall x \in [2, +\infty[,\ 2x + 1 > 0$ ».

f) P : « $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2 + 1 = 0$ ».

g) P : « $x = 4$ et $x \neq 3$ ».

h) P : « $x > 3$ ou $x < -1$ ».

Exercice 8. D

Voici les tables de vérité de l'implication (notée $\Rightarrow$) et de l'équivalence (notée $\Leftrightarrow$) où P et Q désignent deux assertions.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Les démonstrations se font en montrant qu'on a les même tables de vérité pour les deux proposition dont on veut démontrer l'équivalence.

1. Démontrez qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes :
   $[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)]$.
2. Démontrez qu'une équivalence équivaut à une implication et sa réciproque :
   $[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)]$.
3. Démontrez que l'équivalence équivaut à l'équivalence des contraires :
   $[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [\text{non}(P) \Leftrightarrow \text{non}(Q)]$.
4. La symétrie de l'équivalence :
   $[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [Q \Leftrightarrow P]$.
5. Les implications circulaires pour démontrer des équivalences.
   $$\left\{\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow P \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} P \Leftrightarrow Q \\ Q \Leftrightarrow R \\ R \Leftrightarrow Q \end{array}\right.$$

Exercice 9. D

Démontrez : $[0; 1] = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]\frac{1}{n}; 1\right]$.

Exercice 10. D

Déterminez si les ensembles E et F suivants sont égaux ou pas.

a) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 1 = 7\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = 7y\}$.

b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y + 3 = 0\}$ et $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{2}{3}x - 1\right\}$.

c) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad \right\}$ et $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\right\}$.

Exercice 11. E

Soient E un ensemble, A, B et C des parties de E.
Démontrez les propriétés suivantes :

a) $A \cup \varnothing = A$.

b) $A \cup A = A$.

c) $A \cup E = E$.

d) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$.

e) $A \cup B = B \cup A$.

f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

g) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

h) $A \cap A = A$.

i) $A \cap E = A$.

j) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$.

k) $A \cap B = B \cap A$.

l) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

m) $\overline{\varnothing} = E$.

n) $\overline{E} = \varnothing$.

o) $\overline{\overline{A}} = A$.

p) $\overline{A} = E \setminus A$.

q) $A \setminus \varnothing = A$.

r) $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B$.

s) $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \setminus (A \cap B)$.

Exercice 12. E