02 Réels.

I Notations.

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Il existe des notations dérivées. $\mathbb{R}_+$ désigne les nombres positifs (0 y compris). $\mathbb{R}_-$ est l'ensemble des nombres négatifs. $\mathbb{R}^*$ désigne l'ensembles des nombres réels hormis 0. $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des nombres positifs hormis 0. $\mathbb{R}_-^*$ est l'ensemble des nombres négatifs hormis 0.

II Propriétés.

L'ensemble de nombres $\mathbb{R}$ est muni de deux lois (des opérations) : l'addition et la multiplication.

Ces deux opérations vérifient les propriétés suivantes.

(i) Addition et multiplication sont *associatives*. Quels que soient $x \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$,

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad \text{et} \quad x \times (y \times z) = (x \times y) \times z.$$

(ii) Addition et multiplication admettent des *éléments neutres* : le 0 pour l'addition et le 1 pour la multiplication. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x + 0 = 0 + x = x \quad \text{et} \quad x \times 1 = 1 \times x = x.$$

(iii) Addition et multiplication sont *commutatives*. Quels que soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$x + y = y + x \quad \text{et} \quad x \times y = y \times x.$$

(iv) La multiplication est *distributive* sur l'addition. Quels que soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$,

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z.$$

Rappelons quelques conventions. Les calculs se font d'abord entre parenthèses. Les multiplications sont implicitement supposées entre parenthèses tout comme les numérateurs et dénominateurs de fractions. Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion la multiplication est notée implicitement (absence de symbole).

Rappelons les identités qui découlent de la distributivité et permettent de factoriser (transformer une écriture sous forme d'une addition en une écriture sous forme d'une multiplication). x, y et z désignent des éléments de $\mathbb{R}$.

(i) $x \times y + x \times z = x \times (y + z)$.

(ii) $x^2 - y^2 = (x - y) \times (x + y)$.

(iii) $x^2 + 2 \times x \times y + y^2 = (x + y)^2$.

(iv) $x^2 - 2 \times x \times y + y^2 = (x - y)^2$.

III Manipulation d'inégalités.

Les inégalités restent aussi vraies (en particulier les inéquations ont les mêmes solutions) si l'on applique les règles suivantes pour les transformer.

(i) Ajouter (ou soustraire) le même nombre aux deux membres d'une inégalité donne une inégalité équivalente.
Quels que soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$,

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x + z \leqslant y + z.$$

(ii) Multiplier (ou diviser) par le même nombre non nul et positif les deux membres d'une inégalité donne une inégalité équivalente.
Quels que soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}_+$,

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \times z \leqslant y \times z.$$

(iii) Si les membres d'une inégalité sont multipliés par un nombre négatif non nul, alors on obtient une inégalité équivalente en changeant le sens de l'inégalité.
Quels que soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}_-$,

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \times z \geqslant y \times z.$$

(iv) Il est possible d'additionner membre à membre deux inégalités pour en former une nouvelle.
Quels que soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x \leqslant y \\ z \leqslant t \end{cases} \Rightarrow x + z \leqslant y + t$$

(v) Il est possible de multiplier membre à membre deux inégalités de nombres strictement positifs pour en former une nouvelle.
Quels que soient $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+^*$, $z \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{cases} x \leqslant y \\ z \leqslant t \end{cases} \Rightarrow x \times z \leqslant y \times t$$

IV Intervalles.

Les *intervalles* désignent des ensembles de nombres réels sans trous : il s'agit de tous les nombres compris entre deux bornes.

Si a et b sont des éléments de $\mathbb{R}$ avec $a < b$ alors on note

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}, \quad]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$[a,b[:=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x<b\}\,,\quad]a,b]:=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leqslant b\}\,,$$

les intervalles bornés et

$$[a,+\infty[:=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x\}\,,\quad]a,+\infty[:=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}\,,$$

$$]-\infty,b]:=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant b\}\,,\quad]-\infty,b[:=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}\,,$$

les intervalles non-bornés.

V Valeur absolue.

On définit la *valeur absolue* d'un nombre réel x par

$$|x|:=\begin{cases} x \text{ si } x\geqslant 0\\ -x \text{ sinon}\end{cases}$$

Si x et y sont des nombres réels $|x-y|=|y-x|$ s'interprète comme la distance entre les nombres x et y.

La valeur absolue vérifie *l'inégalité triangulaire*. Si x et y sont des éléments de $\mathbb{R}$ alors

$$|x+y|\leqslant|x|+y|.$$

VI Exercices.

Exercice 1. A

Parfois il peut être intéressant de décomposer un calcul pour l'effectuer sans ordinateur. Exemple : $8634\times21 = 8634\times(20+1) = 8634\times20+8634\times1 = 172680+8634 = 181314$. *C'est la méthode de la multiplication posée en colonne.* Calculez à la main.

a) $1\,234\times23$.

b) $25{,}6\times13$.

c) $457\times\left(3^2+3+1\right)$.

d)

Exercice 2. A

Factorisez les expressions suivantes.

a) $f(x) = 7 \times x + 3 \times x$.

b) $f(x) = 2 \times x - 3 \times x$.

c) $f(x) = -7 \times x + 2 \times x \times x$.

d) $f(x) = -x + 3 \times x$.

e) $f(x) = 2x + 3x$.

f) $f(x) = -5x - 4x$.

g) $f(x) = 2x + 3x^2$.

h) $f(x) = x^2 - 3^2$.

i) $f(x) = x^2 - 49$.

j) $f(x) = x^2 - 8$.

k) $f(x) = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$.

l) $f(x) = x^2 + 8x + 16$.

m) $f(x) = x^2 - 4 \times x \times 8 + 8^2$.

n) $f(x) = x^2 - 12x + 36$.

Exercice 3. A

Résolvez les équations suivantes (isolez l'inconnue x).

a) $x + 2 = 5$.

b) $x - 4 = 2$.

c) $x - 5 = -8$.

d) $x + 7 = -5$.

e) $12x = 0$.

f) $2x = 6$.

g) $-3x = 6$.

h) $-7x = 14$.

i) $-5x = -25$.

j) $3x + 12 = 0$.

k) $5x - 10 = 0$.

l) $-9x + 18 = 0$.

m) $-13x - 39 = 0$.

n) $14x + 2 = -26$.

o) $3x - 1 = 8$.

p) $-2x - 11 = -5$.

q) $4 = 7 - 8x$.

r) $-5 = -4 + 3x$.

Exercice 4. A

Déterminez l'ensemble en compréhension correspondant à l'intervalle I dans les cas suivants. Exemple : $[3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x\}$.

a) $I = [2; 4]$.

b) $I = [-3, 5[$.

c) $I =]-6, -2]$.

d) $I =]234; 867[$.

e) $I =]-\infty, -3]$.

f) $I =]-\infty, 34[$.

g) $I =]23, +\infty[$.

h) $I = [-\pi, +\infty[$.

i) $I =]\sqrt{3}, \mathrm{e}[$.

Exercice 5. A

Dites si le nombre α appartient, ou pas, à l'ensemble I.

a) $\alpha = 2$ et $I = [1;5]$.

b) $\alpha = 5$ et $I =]-3,-1]$.

c) $\alpha = 0$ et $I = [-1,+\infty[$.

d) $\alpha = 2$ et $I =]-\infty, 2[$.

e) $\alpha = \pi$ et $I =]0,1[$.

f) $\alpha = -46$ et $I = [-46,+\infty[$.

g) $\alpha = -1$ et $I = [-2;-1[$.

Exercice 6. A

Exprimez les nombres suivants sans valeur absolue sans effectuer le calcul.
Exemple : $|3-4| = 4-3$.

a) $|3|$.

b) $|-12|$.

c) $|-\pi|$.

d) $|-(-4)|$.

e) $|-(3-4)|$.

f) $\left|\frac{8}{3}-\frac{7}{3}\right|$.

g) $\left|\frac{7}{2}-\frac{7}{5}\right|$.

h) $\left|\sqrt{5}-\sqrt{7}\right|$.

i) $\left|(-2)^2-(-5)^2\right|$.

Exercice 7. B

Résolvez l'inéquation puis donnez l'ensemble des solutions. Exemple : $-3x < 2 \iff x > -\frac{2}{3} \iff x \in \left]-\frac{2}{3},+\infty\right[$.

a) $x \geqslant 4$.

b) $x+5 < -1$.

c) $x-6 \leqslant 2$.

d) $2x \leqslant 6$.

e) $17x \geqslant 0$.

f) $-3x < 18$.

g) $-12x < -36$.

h) $2x+1 \leqslant 7$.

i) $-5x-7 \geqslant 13$.

j) $-3x+1 > 9$.

k) $-5x < 2x$.

l) $-3x+1 > x$.

m) $-7x+6 \geqslant 5-2x$.

n) $-x \leqslant 3-6x$.

o) $0 < -3x+9$.

Exercice 8. B

Pour résoudre l'inéquation produit nul $(2x-4)(-3x+6) \leqslant 0$ on résout les équations $2x-4>0$ et $-2x+6>0$ et on construit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$2x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-4)(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut alors conclure que l'ensemble des solutions est $[2;3]$.

Résolvez les inéquations produit nul suivantes en donnant l'ensemble des solutions.

a) $(x-5)(-2x+6) \geqslant 0$

b) $(3x-5)(x+4) > 0$

c) $(x+3)(-x+6) \leqslant 0$

d) $(-x+4)(3x+2) > 0$

e) $(10x+5)(-3x+4) > 0$

f) $(x-4)(3-x) \leqslant 0$

g) $(-2x+3)(5+x) > 0$

h) $3x(3x-5) < 0$

i) $-(x+1)^2(2x-1) \geqslant 0$

j) $-2x(x-1)(4-x) \leqslant 0$

k) $x^2(4-x)(-2x+1) > 0$

l) $x^3(x+1) < 0$

m) $(x^2+1)(x-1) \geqslant 0$

n) $(x-2)(4-x) < 0$

o) $\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(x-\frac{7}{6}\right) \geqslant 0$

p) $(x+\sqrt{3})(x-4) \geqslant 0$

q) $(3x-7)(7-3x) \leqslant 0.$

Exercice 9. C

Résolvez les inéquations en vous ramenant d'abord à une inéquation produit nul. Donnez l'ensemble des solutions.

a) $x^2 - 4x \leq -2x - 1$

b) $3x(x+3) - (x+3)^2 \leq 0$

c) $x^3 + 2x^2 + x \geq 0$

d) $x(x+6) > 3(x+6)$

e) $2x(x-3) + 3x - 9 < 6x - 18$

f) $x^2(1-3x) + 4(6x-2) \geq 0$

g) $(1-2x)x - 4x(x+6) \leq 0$

h) $7 - x^2 < 2x - 2\sqrt{7}$

i) $(x^2 - 1) + 2x - 2 > 6x - 6$

j) $x^2 \leq 10$

k) $x^2 \leq -16$

l) $x^2 \leq 0$

m) $x^2 < 8$

n) $x^2 \leq 144$

o) $x^2 \leq 20$

p) $x^2 - 4 + (x+2)(2x+5) < 0$

q) $(x+1)(x-3) \geq x^2 - 9$

r) $4x - 4 + (x-1)(x-4) + x^2 - 1 > 0$

s) $(x+5)^2 \leq (x+5)(x+3)$

t) $(2x-1)(x+3) \geq \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+6)$

Exercice 10. C

En raisonnant géométriquement et sans justifier donnez l'ensemble des solutions des équations et inéquations suivantes. Exemple : dire que x vérifie $|x-2| \leqslant 1$ signifie que le nombre x est à une distance inférieure à 1 du nombre 2, autrement dit $x \in [2-1; 2+1] = [1; 3]$.

a) $|x+3| \leqslant 2$.

b) $|x-10| < 2$.

c) $|x-4| \leqslant 1$.

d) $|x-73| < 2$.

e) $|x+8| \leqslant 10$.

f) $|x-3| \leqslant 4$.

Exercice 11. D

Démontrez que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$||x| - |y|| \leqslant |x-y|.$$

Exercice 12. D

Soient x et y des nombres réels. On note $\max\{x, y\}$ le plus grand et $\min\{x, y\}$ le plus petit des deux nombres x et y.

Exprimez $\max\{x, y\}$ et $\min\{x, y\}$ en fonction de x, de y et de $|x-y|$.