01 Ensembles.

1 "Définition".

Un ensemble est un objet mathématique comme les nombres, les fractions, les formules algébriques en sont.

La définition de l'objet ensemble relève de la logique. Retenons qu'un ensemble est une collection d'objets tous distincts. Un objet de cette collection est appelé un *élément* de l'ensemble.

2 Comment noter, nommer et décrire un ensemble ?

Les ensembles sont omniprésents en mathématiques et ils ont de très nombreuses notations possibles.

- Certains ensembles sont d'usage tellement courant qu'ils ont un nom propre et une notation spécifique.

  $\mathbb{N}$ est *l'ensemble des entiers naturels* ; il regroupe des nombres entiers positifs.

  $\mathbb{Z}$ est *l'ensemble des entiers* ; il regroupe des entiers positifs ou négatifs.

  $\mathbb{R}$ est *l'ensemble des nombres réels* ; il regroupe tous les nombres au sens usuel.

  $\varnothing$ est *l'ensemble vide* ; c'est l'ensemble qui ne contient aucun objet.

  $[\![a, b]\!]$, avec $a \leqslant b$ des entiers, désigne l'ensemble des nombres entiers compris (au sens large) entre a et b.

  Nous rencontrerons aussi $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty$, ...
- On peut décrire un ensemble en extension en donnant la liste de tous ses éléments. $\left\{2; a; -3, 1; \frac{1}{3}\right\}$ est un ensemble de nombres qui contient cinq éléments.
- On peut décrire un ensemble par une phrase en français. Notons par exemple E l'ensemble des tous les nombres positifs.

  Pour dire que le nombre 3 est un élément de E nous écrirons $3 \in E$. Pour indiquer que -1 n'est pas un élément de E nous écrirons $-1 \notin E$.
- On peut décrire une ensemble par une phrase mathématique (assertion).

  Le précédent ensemble E est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant 0$. Ce que nous écrirons formellement : $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.
- Nous parlerons d'*ensemble dénombrable* lorsque l'ensemble considéré n'est pas plus gros que $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

3 Sous-ensemble, parties, inclusion.

Définition 1

On dit qu'un ensemble F est un *sous-ensemble* (ou une *partie*) d'un ensemble G si et seulement si : $\forall f \in F,\ f \in G$. « $\forall$ » signifie « pour tout » ou « quelque soit ».
Si c'est le cas on note $F \subset G$.

L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble G est noté $\mathcal{P}(G)$.

4 Ensemble complémentaire.

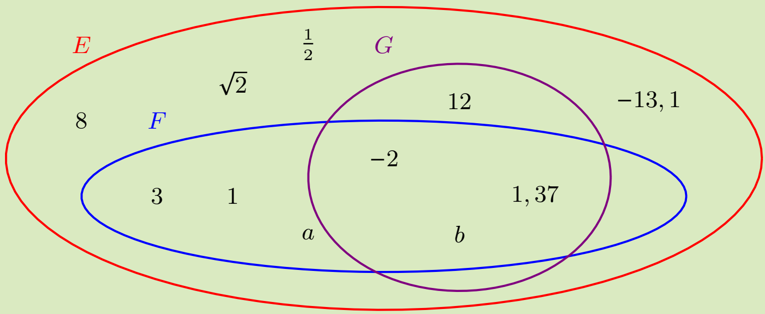
Définition 2

Si E et F sont deux ensembles on appelle complémentaire de F dans E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F.
Si $F \subset E$ alors le complémentaire de F (dans E) est noté $\overline{F}$.

I Exercices.

Exercice 1. B

On a schématisé ci-dessous des ensembles.



1. Complétez par $\in$ ou $\notin$.

   a) $\frac{1}{2} \ldots G$. b) $1 \ldots F$. c) $a \ldots E$.

   d) $a \ldots G$. e) $\sqrt{2} \ldots F$. f) $\sqrt{2} \ldots G$.

   g) $12 \ldots G$. h) $1,37 \ldots E$. i) $1,37 \ldots F$.

   j) $3 \ldots F$. k) $b \ldots F$. l) $11 \ldots E$.

2. Donnez une description en extension des ensembles F et G.
3. A-t-on $F \subset E$, $G \subset E$, $E \subset G$, $F \subset G$ et $G \subset F$? Si la réponse est négative justifiez. Exemple : $E \not\subset F$ car $8 \in E$ mais $8 \notin F$.
4. Donnez une description en extension du complémentaire de F dans E.

Exercice 2. A

Complétez par $\in$ ou $\notin$.

a) $3 \ldots \mathbb{N}$. b) $-5 \ldots \mathbb{N}$. c) $0 \ldots \mathbb{N}$.

d) $3,5 \ldots \mathbb{N}$. e) $-7 \ldots [\![-5,2]\!]$. f) $-6 \ldots \mathbb{Z}$.

g) $2 \ldots \mathbb{Z}$. h) $0 \ldots \mathbb{Z}$. i) $-2,3 \ldots \mathbb{Z}$.

j) $\frac{1}{3} \ldots \mathbb{Z}$. k) $1 \ldots \mathbb{R}$. l) $5 \ldots [\![1,14]\!]$.

m) $\pi \ldots \mathbb{R}$. n) $4 \ldots \varnothing$.

Exercice 3. B

Dites si le nombre a appartient à l'ensemble E dans les cas suivants.

a) $a = 0$ et $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \geqslant -2\}$.

b) $a = 3$ et $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x = 6\}$.

c) $a = -3$ et $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -2x \leqslant 1\}$.

d) $a = -1$ et $E = \{x \in [\![-2, 1]\!] \mid x^2 = 1\}$.

e) $a = -2$ et $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 10 = 6\}$.

f) $a = \sqrt{3}$ et $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x = 3\}$.

g) $a = \pi$ et $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 3,4 = 0\}$.

h) $a = 1,5$ et $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 = 3x + 1\}$.

i) $a = \frac{1}{3}$ et $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x = 1\}$.

j) $a = (2; -3)$ et $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -1\}$.

Exercice 4. B

Donnez tous les éléments de $\mathcal{P}(E)$ dans les cas suivants.

a) $E = \varnothing$.

b) $E = \{a\}$.

c) $E = \{a, b\}$.

d) $E = \{a, b, c\}$.

e) $E = \{a, b, c, d\}$.

Exercice 5. B

Justifiez que $E \not\subset F$ dans les cas suivants.

a) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 = 0\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.

b) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x = 0\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 = 0\}$.

c) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2\}$.

d) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-3)(x-5) = 0\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 10 = 0\}$.

Exercice 6. B

Justifiez que $E \subset F$ dans les cas suivants.

a) $E = \{2; -3; 0\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x+7)(x-2)(x+3) = 0\}$.

b) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 3 = 8\}$ et $F = [\![1, 10]\!]$.

c) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 49\}$ et $F = [-8, 10]$.

d) $E = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ et $F = \mathbb{N}$.

e) $E = \{t \in \mathbb{R} \mid t^2 + 1 = 0\}$ et $F = \varnothing$.

f) $E = \{y \in [\![1, 5]\!] \mid y^2 = 4\}$ et $F = \left\{\frac{1}{3}; 0; -1; 6; 2; -12\right\}$.

Exercice 7. C

Dites si le couple (a,b) appartient à l'ensemble E dans les cas suivants. *La notation* $\mathbb{R}^2$ *désigne l'ensemble des couples de nombres réels.*
Par exemple $(2;1) \notin E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 0\}$ car $2 + 3 \times 1 \neq 0$.

a) $(a,b) = (1;3)$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y + 1 = 0\}$.

b) $(a,b) = (-1;4)$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$.

c) $(a,b) = (-1;2)$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y - 1 = 0\}$.

d) $(a,b) = (0;1)$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.

e) $(a,b) = (0;1)$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$.

f) $(a,b) = (2;1)$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 6y = 0\}$.

g) $(a,b) = (0;0)$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 12x - 48y = 0\}$.

Exercice 8. C

Donnez une expression en extension de l'ensemble E dans les cas suivants.

a) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 6x + 9 = 0\}$.

b) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 = 0\}$.

c) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$.

d) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 = 0\}$.

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 1 = 0\}$.

Exercice 9. D

On appelle *cardinal* d'un ensemble le nombre d'éléments dans un ensemble.
Déterminez le nombre d'éléments dans l'ensemble E.

a)