Khôlles du 2024/04/15.

Khôlle : algèbre linéaire.

1. Démontrez que l'application $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 + 3x_2 - x_3; x_1 + 2x_3; 5x_1 + 3x_2 + 5x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ est linéaire.
2. Justifiez que $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_3 = 0 \text{ et } 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. f est-elle injective ?

Khôlle : algèbre linéaire.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculez le produit $A \times \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -4 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$.
2. Calculez A^2, A^3.
3. Conjecturez une formule générale, en fonction de $n \, in \in \mathbb{N}^*$, de A^n.

Khôlle : algèbre linéaire.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Donnez l'application f associée à A.
2. Calculez le produit $A \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire pour le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$?
3. Déterminez le noyau de f.

Khôlle : algèbre linéaire.

Les questions sont indépendantes.

1. Calculez le produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Résolvez le système $\left\{ \begin{array}{cccccc} 2x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & = & 0 \end{array} \right.$.

   Que peut-on en déduire pour l'application $f : (x_1; x_2) \mapsto (2x_1 + x_2; -x_1 + x_2; x_1 + 5x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$?

3. Calculez A^3 avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Khôlle : séries.

Déterminez la nature de la série et si possible sa somme.

1. $\sum_{n\geqslant 0} 5^n$.
2. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{8\,273}}$.
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{12^n}{n!}$.
4. $\sum_{n\geqslant 0} n^2 \ln(n)$.
5. $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n n$.

Khôlle : séries.

Déterminez la nature de la série et si possible sa somme.

1. $\sum_{n \geqslant 0} 0,78^n$.
2. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$.
3. $\sum_{n \geqslant 0} \frac{2\,024\,415^n}{n!}$.
4. $\sum_{n \geqslant 0} n^2 \mathrm{e}^n$.
5. $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n!}$.

Khôlle : séries.

Déterminez la nature de la série et si possible sa somme.

1. $\sum_{n\geqslant 0} 1756^n$.
2. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{0,1718}}$.
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\left(-(\sqrt[3]{7}\right)^n}{n!}$.
4. $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n}$.
5. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n \ln(n)}{n!}$.

Khôlle : limites de fonctions.

Déterminez la limite de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$ et $a = +\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 2}{7x^2 - 6} + \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3}$ et $a = 0$.
3. $f(x) = 3x + \dfrac{\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}}{1 - \frac{1}{x}}$ et $a = -\infty$.
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^7 + 2x^2 + x}{x^9 + 1}\right)$ et $a = +\infty$.

Khôlle : limites de fonctions.

Déterminez la limite de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. $f(x) = \ln(x) + \mathrm{e}^{-x}$ et $a = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{-4x^3 + 3x^2 + 1}{8x^2 + x} + \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + x + 1}$ et $a = +\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{1 + \sqrt[3]{\mathrm{e}^x}} + \ln(x^2)$ et $a = -\infty$.
4. $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^7 - 3x^2 + 3}{x^3 + 4x - 12}\right)$ et $a = -\infty$.

Khôlle : limites de fonctions.

Déterminez la limite de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^7} - \ln(x) + 10$ et $a = +\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{\exp(x)}{1 + \frac{x}{x^2+1}} + \dfrac{-3x^7}{4x^7 + x^5 + x^4}$ et $a = +\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[3]{\ln(x)}}$ et $a = +\infty$.
4. $f(x) = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x^2}{x^6 + x^5 + 4}\right)}$ et $a = +\infty$.

Khôlle : limites de fonctions.

Déterminez la limite de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x^3}$ et $a = +\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x - 6}$ et $a = -2$.
3. $f(x) = \mathrm{e}^x (x^3 + 2x^2 + x + 1)$ et $a = +\infty$.
4. $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$ et $a = +\infty$.

Khôlle : probabilité.

Une urne contient trois boules rouges et une boule noire.

1. On tire successivement trois boules de l'urne et sans remise.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au troisième tirage ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage sachant qu'une boule noire est obtenue au troisième tirage ?
2. On tire une boule de l'urne on note sa couleur et on la replace dans l'urne. On recommence indéfiniment ce tirage.
   On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire qui indique le nombre de boules noires obtenues lors des n premiers tirages.
   (a) Donnez le support, $X(\Omega)$, de X.
   (b) Donnez une issue qui réalise l'événement $\{X_3 \leqslant 1\}$.

Khôlle : probabilité.

On joue à pile-ou-face avec une pièce déséquilibrée. La probabilité d'obtenir le pile est $p \in]0;1[$.

1. Si on obtient pile on relance la pièce sinon on s'arrête. On lance, au plus, 3 fois la pièce.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir face au troisième lancer ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir un pile au premier lancer sachant qu'on a obtenu face au troisième lancer ?
2. On lance maintenant indéfiniment la pièce.
   On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'événement « obtenir pile au n-ième lancer », A « ne jamais obtenir pile » et B « obtenir au moins un pile ».
   (a) Exprimez A et B avec les événements P_n.
   (b) Calculez $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Khôlle : probabilité.

Une fourmi se déplace au hasard sur une règle graduée de 1 cm en 1 cm vers la droite ou vers la gauche. Elle part de la graduation 10 cm. On note X_n la graduation atteinte par la fourmi au bout de $n \in \mathbb{N}^*$ déplacements.

1. On s'intéresse au cas $n = 2$.
   (a) Précisez le support, $X_2(\Omega)$, de la variable aléatoire X_2.
   (b) Expliquez en français ce qu'est l'événement $\{X_2 = 14\}$ puis donnez $\mathbb{P}(X_2 = 14)$.
   (c) Calculez $\mathbb{P}(X_2 = 10)$.
2. Calculez $\mathbb{P}(X_3 = 11 | X_1 = -9)$.