Khôlles du 2024/02/12.

I Khôlle.

1. On considère la droite affine, d, de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passant par le point $A(2, -3)$.

   (a) Placez le point A dans un repère, dessinez un représentant de $\vec{u}$.

   (b) Dessinez dans le précédent repère la droite d.

   (c) Proposez une représentation paramétrique de d.

   (d) On admet que $-x+2y+8=0$ est une équation cartésienne de d. Assurez vous que $A \in d$ grâce à l'équation cartésienne.

   (e) Sachant que $d = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + 2y + 8 = 0\right\}$, justifiez que d n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2. On considère l'ensemble $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 7x_1 + 8x_2 = 0\}$.

   (a) Démontrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Démontrez que E est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Donnez deux vecteurs non nul appartenant à E. Que sont-ils l'un à l'autre ? Justifiez-le.

   (d) Donnez une équation cartésienne de E.

   (e) Déterminez un vecteur directeur de E.

   (f) Déduisez-en une représentation paramétrique de E.

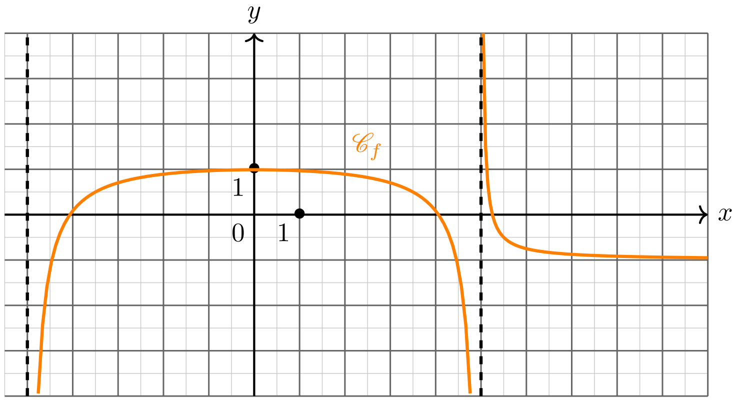
3. Déterminez $d \cap E$.

II Khôlle.

1. Donnez sans justification les limites : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to-\infty} e^x$, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x}$.
2. (a) Tracez à main levée les courbes représentatives des fonctions cube, tangente, racine carrée et logarithme népérien.

   (b) Tracez le tableau de variation de la fonction logarithme népérien.

   (c) Donnez des exemples (par un schéma ou avec des fonctions de référence) d'une fonction impaire, d'une fonction non monotone, d'une fonction périodique, d'une fonction strictement croissante, d'une fonction admettant une asymptote verticale, d'une fonction admettant une asymptote horizontale.
3. On considère une fonction f dont la courbe représentative est ci-dessous.



   (a) Donnez le domaine de définition de f en précisant les éventuelles valeurs interdites.

   (b) Déterminez les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

   (c) Précisez les asymptotes à la courbe représentative de f.

   (d) f est-elle croissante sur $[0; +\infty[$?

   (e) Donnez le tableau de variation de f.

   (f) Comparez $f(-4)$ et $f(0)$, puis $f(3)$ et $f(7)$, et enfin, $f(100)$ et $f(10^3)$.

   (g) f admet-elle un majorant, un minimum, un maximum, un minimum sur $]-5;5[$? sur $]5;+\infty[$?

III Khôlle.

1. Rappelez la formule des probabilités composées.
2. Donnez deux diagrammes de Venn illustrant la formule $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
3. On tire successivement et sans remise deux boules d'une urne contenant 3 boules rouges et 5 boules vertes.
   (a) Représentez la situation par un arbre probabiliste pondéré.
   (b) Calculez la probabilité d'obtenir successivement deux boules rouges.
   (c) Calculez la probabilité d'obtenir une boule rouge puis une boule verte.
   (d) Donnez la probabilité d'obtenir au moins une boule verte ou une boule rouge lors des deux tirages.
4. Une urne contient n boules blanches et p boules noires où p et n sont des entiers naturels non nuls.
   On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. Puis on recommence indéfiniment ce tirage.
   On note B_k et N_k les événements obtenir une boule blanche et obtenir une boule noire au k-ième tirage.
   (a) Donnez un arbre probabiliste pondéré représentant cette situation.
   (b) Comment est représenté l'événement $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ sur l'arbre ?
   (c) Quel est l'univers associé à cette expérience aléatoire ?
   (d) Calculez $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)$.
   (e) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimez $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_k)$ en fonction de n, p et k.

IV Khôlle.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ pour tout entier naturel n.
   (a) Si la suite converge vers un réel ℓ démontrez que ℓ est solution de $\ell(\ell+1) = \ell$. Déduisez-en la valeur de ℓ.
   (b) Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel, $u_n > 0$ et $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.
   (c) Concluez quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 5v_n + 8$ pour tout entier naturel n.
   (a) Démontrez par récurrence que $v_n = 3\times 5^n - 2$.
   (b) Déduisez-en la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrez par récurrence que $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1$.
4. Démontrez que $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
5. Soient $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout entier naturel n.
   (a) Calculez F_2 et F_3.
   (b) Démontrez par récurrence que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes tous positifs.
   (c) Déterminez le sens de variation de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Montrez que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q alors q est solution de $q^2 - q - 1 = 0$.
   (e) Déterminez les valeurs possibles pour q.

V Khôlle.

1. Donnez un exemple de suite arithmétique en précisant sa raison et son premier terme. Donnez-en une expression en fonction de n.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n^2 + v_n$.
   (a) Calculez v_1, v_2 et v_3.
   (b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ou géométrique ?
   (c) Exprimez v_{n+2} en fonction de v_{n+1}.
   (d) Donnez une fonction f telle que $f(v_n) = v_{n+1}$ pour tout entier naturel n.
3. Soient $f : x \mapsto 3x + 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $f(u_n) = u_{n+1}$ pour tout n entier naturel et $u_0 = 0$.
   (a) Calculez u_1 et u_2.
   (b) Quelle est la nature de la fonction f ? Précisez ses éléments caractéristiques.
   (c) Déterminez le sens de variation de f.
   (d) Démontrez par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (e) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, quelle est alors forcément sa limite ℓ ?
   (f) On admet que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est géométrique. Déterminez sa raison.
   (g) Donnez une formule explicite de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (h) Déduisez de la question précédente une expression de u_n en fonction de n.
   (i) Concluez quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

VI Khôlle.

1. (a) Rappelez les définitions de suites géométrique et arithmétique.
   (b) Donnez les formules explicites (ne fonction de n) du terme général d'une suite arithmétique puis d'une suite géométrique.
2. (a) Un loyer 600 euros mensuel augmente de 2 euros par mois. Donnez le total des salaires versés en n mois.
   (b) Au bout de combien d'années le total des loyers versés dépassera-t-il 100 000 euros ?
3. Chaque année les dividendes versés par une entreprise augmentent de 10 %. Le premier dividende, d_0 s'élevait à $0,1$ euro. On note d_n le dividende versé la n-ième année.

   (a) Donnez une formule explicite, en fonction de n, du dividende versé pour une action la n-ième année.
   (b) Calculez le total des dividendes versés pendant les n premières années.
   (c) Sachant qu'en parallèle la valeur de l'action augmente de 2 % par an, proposez une méthode pour calculer la valeur total de 100 actions, dividendes inclus, au bout de n années.

4. Une maison est achetée 200 000 euros. Son prix est réévalué chaque année en tenant compte de l'inflation constante égale 2 %. Le prix de la maison n années après son achat est noté p_n. En particulier $p_0 = 200\,000$.

   (a) Justifiez que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   (b) Donnez une expression explicite de p_n (en fonction de n).
   (c) Au bout de combien d'années le prix actualisé de la maison dépassera-t-il 300 000 euros ?
   Indication : $\dfrac{\ln(3) - \ln(2)}{\ln(1,02)} \approx 20,46$.

VII Khôlle.

1. (a) Donnez un exemple de matrice 3×2.
   (b) Qu'est-ce que I_5 ?
   (c) Qu'est-ce que $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$?
   (d) Donnez un exemple d'une matrice carrée, d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire inférieure.
2. Soit $f : (x_1, x2) \mapsto (2x_1 + 3x_2, -x_2, x_1 + x_2)$ et $g : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, -x_1, 1 + x_2)$.
   (a) Calculez $f(-1; 3)$.
   (b) Rappelez la définition d'application linéaire.
   (c) Proposez si possible une matrice, M, associée à f.
   (d) Proposez si possible une matrice, N, associée à g.
   (e) Déterminez si f et g sont des applications linéaires ou pas.
3. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Donnez la transposée de A.
   (b) Calculez $A \times \vec{x}$ (ou $A(\vec{x})$).

VIII Khôlle.

1. Exprimez $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Exprimez $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Exprimez $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2^i$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Exprimez $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.