Khôlles en HKBL.

Exercice 0 : calculs en vrac.

1. Calculez.
   (a) $-3 \times (-21)$.
   (b) $-2 - 7$.
   (c) $\frac{27}{12} - \frac{13}{12}$.
   (d) $\frac{1}{3} + \frac{4}{5}$.
   (e) $\frac{8}{9} \times \frac{6}{7}$.
2. Si $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 5$ alors calculez $f(-3)$.
3. Résolvez les équations et inéquations suivantes.
   (a) $3x - 7 = -7x + 13$.
   (b) $\frac{6x - 13}{x^2 + x + 7} = 0$.
   (c) $(x - 3)(x + 6) = 0$.
   (d) $(-x + 1)(3x - 7) = 0$.
   (e) $x^2 - 5x + 6 = 0$.
   (f) $(2x - 2)(x + 1) > 0$.
4. Résolvez le système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & 5y & = 1 \\ 3x & - & 2y & = 4 \end{array} \right.$$

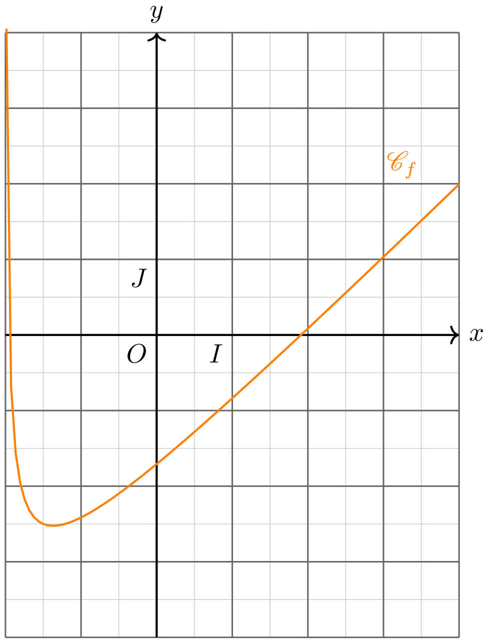
Exercice 0 bis : calculs en vrac.

1. Calculez.
   (a) $-2 \times (-117)$.
   (b) $-13 - 5$.
   (c) $\dfrac{14}{13} - \dfrac{7}{13}$.
   (d) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7}$.
   (e) $\dfrac{9}{8} \times \dfrac{6}{7}$.
2. Si $f : x \mapsto 2x^2 + 4x + 1$ alors calculez $f(-4)$.
3. Résolvez les équations et inéquations suivantes.
   (a) $5x - 3 = -11x + 7$.
   (b) $\dfrac{8x-9}{x^2+x+7} = 0$.
   (c) $(x-5)(x+12) = 0$.
   (d) $(-x+2)(5x-2) = 0$.
   (e) $x^2 - 5x + 4 = 0$.
   (f) $(x-7)(3x+7) > 0$.
4. Résolvez le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

Exercice 1 : applications.

1. Tracez à main levée la courbe représentative de exp.
2. Donnez le domaine de définition de la fonction ln.
3. Donnez une application qui soit bijective et une autre qui ne ne l'est pas.
4. Donnez la définition d'une fonction injective.
5. Soit f une application dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



   (a) Par lecture graphique donnez le domaine de définition de f.
   (b) Tracez le tableau de variation de f.
   (c) f est-elle injective, surjective, bijective ?
   (d) Déterminez l'image de $[1;2]$ par f.
   (e) Déterminez $f^{-1}([-2,5,0])$.
   (f) Comment modifier f pour quelle devienne bijective ?
   (g) Dressez le tableau de variation de f.

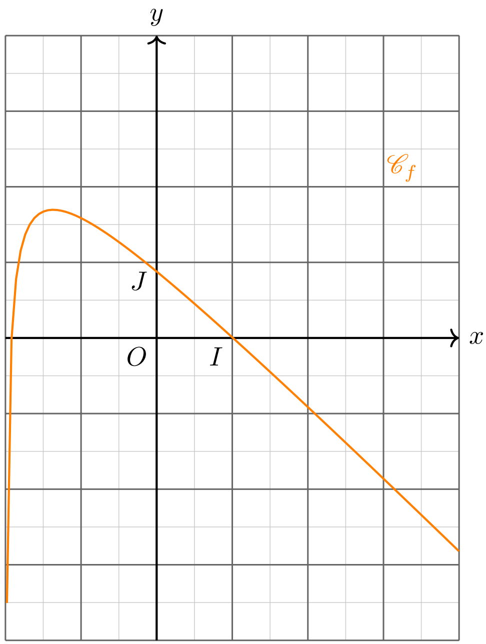
6. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} - x - \sqrt{2} - 1$.

   Déterminez le domaine de définition de g.

7. Soient $h : x \mapsto 4x + 8$ et $k : x \mapsto \frac{1}{4}x - 2$.
   Donnez une expression algébrique de $k \circ h$ puis de $h \circ k$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 1 bis : applications.

1. Tracez à main levée la courbe représentative de ln.
2. Donnez le domaine de définition de la fonction racine carrée.
3. Donnez une application qui soit bijective et une autre qui ne ne l'est pas.
4. Donnez la définition d'une fonction surjective.
5. Soit f une application dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



   (a) Par lecture graphique donnez le domaine de définition de f.
   (b) Tracez le tableau de variation de f.
   (c) f est-elle injective, surjective, bijective ?
   (d) Déterminez l'image de $[1;2]$ par f.
   (e) Déterminez $f^{-1}([-2,5,0])$.
   (f) Comment modifier f pour quelle devienne bijective ?
   (g) Dressez le tableau de variation de f.

6. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x+2)}$.
   Déterminez le domaine de définition de g.
7. Soient $h : x \mapsto \frac{1}{3}x + 5$ et $k : x \mapsto 3x - 5$.
   Donnez une expression algébrique de $k \circ h$ puis de $h \circ k$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 : étude de la convergence d'une suite.

1. Déterminez la limite de la suite $\left(\frac{1}{4^n} + n^2 + 4\right)$.
2. Rappelez la définition de l'équivalence de deux suites puis démontrez que les suites $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\left(1 + 0,5^n\right)$ sont équivalentes.
3. Étudiez la convergence de la suite $\left(\frac{n^4}{2^n}\right)$.
4. Rappelez la définition du fait qu'une suite est négligeable par rapport à une autre puis démontrez que $\left(n^2 - 10^n\right)$ est négligeable par rapport à $(n!)$.
5. Donnez un équivalent simple de la suite $\left(-7n^5 + 6n^4 + n - 12\right)$ et déduisez-en la limite de cette suite.
6. Donnez un équivalent simple de la suite $\left(\frac{5n^2 - 4n + 7}{-13n^2 - 1}\right)$ et déduisez-en la limite de cette suite.
7. Démontrez que $2^n + \frac{1}{n^2} + 3 = o\left(3^n\right)$.
8. Donnez un équivalent simple de $\left(\frac{n^2 \ln(n) + 5}{(\ln(n))^2}\right)$.
9. Donnez un équivalent simple puis la limite de $\left(n^{-2} \ln(1 + n)\right)$.
10. Écrivez en extension la somme $\sum_{i=1}^{4} \ln(i + 1)$ puis exprimez cette somme sous la forme $\ln(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 bis : étude de la convergence d'une suite.

1. Déterminez la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{n^3} + 2^n - 8\right)$.
2. Rappelez la définition de l'équivalence de deux suites puis démontrez que les suites $\left(1 + \dfrac{1}{n!}\right)$ et $\left(1 + n^{-3}\right)$ sont équivalentes.
3. Étudiez la convergence de la suite $\left(\dfrac{\mathrm{e}^n}{n^{37}}\right)$.
4. Rappelez la définition du fait qu'une suite est négligeable par rapport à une autre puis démontrez que $\left(\ln(n) + n^{11}\right)$ est négligeable par rapport à $\left(2^n\right)$.
5. Donnez un équivalent simple de la suite $\left(8n^7 - 5n^4 + 3n^2\right)$ et déduisez-en la limite de cette suite.
6. Donnez un équivalent simple de la suite $\left(\dfrac{13n^2 - 4n + 3}{-7n^2 + 14}\right)$ et déduisez-en la limite de cette suite.
7. Démontrez que $n^4 + \dfrac{1}{n^2} + 3 = o\left(n^5\right)$.
8. Donnez un équivalent simple de $\left(\dfrac{\ln(n) + 2}{n\left(\ln(n)\right)^2}\right)$.
9. Donnez un équivalent simple puis la limite de $\left(n^2 \ln(1 + n)\right)$.
10. Écrivez en extension la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \ln(2i)$ puis exprimez cette somme sous la forme $\ln(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : algèbre linéaire.

1. Calculez $3\begin{pmatrix}-6\\7\\8\end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-17\end{pmatrix}$.
2. On note $\vec{x} = (2;-4;5)$ et $\vec{y} = (2;0;-1)$.
   (a) Donnez n'importe quelle combinaison linéaire de $\vec{x}$et $\vec{y}$.
   (b) Calculez $\vec{x}+\vec{y}$.
   (c) Calculez $-2\vec{x}+3\vec{y}$.
   (d) Calculez $\frac{1}{2}\vec{x}-\vec{y}$.
3. Soient $\vec{u} = (2;-1)$ et $\vec{v} = (1;2)$.
   (a) Existe-t-il une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui soit nulle ?
   (b) Déterminez toutes les combinaisons linéaires $a\vec{u}+b\vec{v}$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ telles que $a\vec{u}+b\vec{v} = (4;-7)$.
4. Soit $E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\right\}$ où on note $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.
   (a) Montrez que $(1;2;0) \in E$.
   (b) Montrez que $(1;1;1) \notin E$.
   (c) A-t-on $\vec{0} \in E$?
   (d) Démontrez que E est stable par combinaisons linéaires.
   (e) E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
5. Soit $F = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid -3x_1 + x_2 = 4\right\}$.
   (a) Démontrez que F n'est pas vide.
   (b) A-t-on $\vec{0} \in F$?
   (c) F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 bis : algèbre linéaire.

1. Calculez $-7\begin{pmatrix}5\\-2\\8\end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-29\\-17\end{pmatrix}$.
2. On note $\vec{x}=(-3;-1;8)$ et $\vec{y}=(-1;1;0)$.
   (a) Donnez n'importe quelle combinaison linéaire de $\vec{x}$et $\vec{y}$.
   (b) Calculez $\vec{x}+\vec{y}$.
   (c) Calculez $-2\vec{x}+4\vec{y}$.
   (d) Calculez $\frac{1}{3}\vec{x}-\vec{y}$.
3. Soient $\vec{u}=(2;1)$ et $\vec{v}=(-1;3)$.
   (a) Existe-t-il une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui soit nulle ?
   (b) Déterminez toutes les combinaisons linéaires $a\vec{u}+b\vec{v}$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ telles que $a\vec{u}+b\vec{v}=(1;2)$.
4. Soit $E=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+2x_2-x_3=0\right\}$ où on note $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$.
   (a) Montrez que $(1;-1;-1)\in E$.
   (b) Montrez que $(2;1;1)\notin E$.
   (c) A-t-on $\vec{0}\in E$?
   (d) Démontrez que E est stable par combinaisons linéaires.
   (e) E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
5. Soit $F=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 \mid x_1+4x_2=5\right\}$.
   (a) Démontrez que F n'est pas vide.
   (b) A-t-on $\vec{0}\in F$?
   (c) F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 : probabilité.

1. On lance une pièce jusqu'à obtenir deux piles successifs. On note alors le rang du second pile. Quel univers peut-on associer à cette expérience ?
2. Démontrez que, si A est un événement (non vide), la famille d'ensembles $\{A, \overline{A}\}$ est une système complet d'événements.
3. Donnez la définition d'une probabilité.
4. Les listes $(0,3; 0,1; 0,6; 0,1)$, $(0,01; 0,97; 0,03; -0,01)$ et $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right)$ sont-elles des distributions de probabilité ?
5. On lance 2 fois un dé parfaitement équilibré à 4 faces numérotées de 1 à 4.
   (a) Schématisez cette expérience par un arbre probabiliste.
   (b) Donnez une issue puis l'univers Ω.
   (c) Quel est le cardinal de Ω (nombre d'éléments de l'ensemble) ?
   (d) Calculez la probabilité d'obtenir d'abord un 3 puis un 2.
   (e) Calculez la probabilité de n'obtenir aucun nombre pair.
   (f) Calculez la probabilité que la somme des nombres obtenus soit inférieure ou égale à 3.
6. Soient A et B des événements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
   (a) Calculez $\mathbb{P}(\overline{A})$.
   (b) Calculez $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 4 bis : probabilité.

1. On lance une pièce 100 fois et on note le nombre de piles obtenus. Quel univers peut-on associer à cette expérience ?
2. On lance un dé à 6 faces. On note A : « obtenir un nombre pair », B : « obtenir un nombre impair » et C : « obtenir un nombre inférieur ou égale à 2. Montrez que $\{A, B, C\}$ n'est pas un système complet d'événements.
3. Donnez la définition d'une probabilité.
4. Les listes $(-0,1; 0,8; 0,2; -0,1)$, $(0,12; 0,58; 0,2; 0,06; 0,04)$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right)$ sont-elles des distributions de probabilité ?
5. On lance 4 fois une pièce parfaitement équilibrée.
   (a) Schématisez cette expérience par un arbre probabiliste.
   (b) Donnez une issue puis l'univers Ω.
   (c) Quel est le cardinal de Ω (nombre d'éléments de l'ensemble) ?
   (d) Calculez la probabilité d'obtenir d'abord successivement pile, face,pile et pile.
   (e) Calculez la probabilité de n'obtenir un seul pile.
   (f) Calculez la probabilité que le nombre de piles soit inférieur ou égale à 1.
6. Soient A et B des événements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{7}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{5}{6}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{11}$.
   (a) Calculez $\mathbb{P}(\overline{A})$.
   (b) Calculez $\mathbb{P}(A \cup B)$.