Séries de nombres réels.

I Généralités.

1 Définitions, vocabulaire.

Définition 1

Soit :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On appelle *série de terme général u_n* la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *sommes partielles* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous noterons $\sum u_n$ la série de terme général u_n.
Si $(S_n)_n$ converge alors nous dirons que la série $\sum u_n$ converge. Sinon nous dirons qu'elle diverge.
Si $\sum u_n$ converge alors la limite de (S_n) est appelée *la somme de la série* et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 1 - Condition nécessaire de convergence.

Soit :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition 2

Soit :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Nous dirons que $\sum u_n$ *diverge grossièrement* si et seulement si (u_n) ne tend pas vers 0.

2 Convergence absolue.

Définition 3

Nous dirons que $\sum u_n$ *converge absolument* si et seulement si $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 1 - Lien entre convergence et convergence absolue.

Toutes série réelle absolument convergente est convergente.

De plus, si $\sum u_n$ est absolument convergente :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

II Des séries de référence.

1 Séries arithmétique.

Proposition 2

$\sum rn + u_0$ converge si et seulement si $r = u_0 = 0$.

2 Série des entiers.

Proposition 3

$\sum n$ diverge vers $+\infty$ et $\sum n \sim \frac{1}{2}n^2$.

3 Série des carrés.

Proposition 4

$\sum n^2$ diverge vers $+\infty$ et $\sum n^2 \sim \frac{1}{3}n^3$.

4 Série des cubes.

Proposition 5

$\sum n^3$ diverge vers $+\infty$ et $\sum n^3 \sim \frac{1}{4}n^4$.

5 Séries géométriques.

Proposition 6

Soit $q \in \mathbb{R}$.

$\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Si cette série converge alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

6 Séries géométriques dérivées.

Proposition 7

Soit $q \in \mathbb{R}$.

$\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$ et en cas de convergence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

7 Séries de Riemann.

Proposition 8

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

8 Série exponentielle.

Proposition 9

$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge quelque soit $x \in \mathbb{R}$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Proposition 10

$$\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

9 Séries de Bertrand.

Proposition 11

La série de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

III La règle de d'Alembert.

Théorème 2 - Règle de d'Alembert.

Soient :

. (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

(i) Si $0 \leqslant \ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

IV Le critère de Riemann.

Théorème 3 - Critère de Riemann.

Soient :

. $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

V Séries à termes positifs.

1 Étude de la convergence.

Proposition 12 - Lemme fondamental.

(i) Une série à termes positifs converge ou tend vers $+\infty$.

(ii) Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

2 Opérations sur les séries.

Proposition 13 - Somme de série et nature.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors $\sum \alpha u_n + v_n$ converge.
S'il y a convergence alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha u_n + v_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Proposition 14

On ne change pas la nature d'une série en lui ajoutant une série convergente.

3 Résultats de comparaisons.

Proposition 15

Soient (u_n) et (v_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

(i) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge. De plus :

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Proposition 16

Si (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs, $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Proposition 17

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes strictement positifs et $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

VI Sommes doubles.

VII Exercices.