Séries de nombres réels.

I Généralités.

1 Définitions, vocabulaire.

Exercice 1.

Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que la série, dont le terme général est une constante, converge.

Exercice 2.

Montrez que la série $\sum\limits_{n>0} \ln(n+1)-\ln(n)$ diverge mais qu'elle ne diverge pas grossièrement.

Exercice 3.

Montrez que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2-n-1}{n^2+n+1}$ diverge.

2 Convergence absolue.

II Des séries de référence.

1 Séries arithmétique.

2 Série des entiers.

3 Série des carrés.

4 Série des cubes.

5 Séries géométriques.

Exercice 4.

Déterminez l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}_+^*$ tels que la série $\sum (\ln(\sqrt{x}))^n$ diverge.

6 Séries géométriques dérivées.

7 Séries de Riemann.

8 Série exponentielle.

Exercice 5.

Justifiez la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{4^n}{(n+1)!}$ et calculez sa somme.

9 Séries de Bertrand.

III La règle de d'Alembert.

Exercice 6.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

a) $u_n = \dfrac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$.

b) $u_n = n! \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{2^k}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$.

IV Le critère de Riemann.

V Séries à termes positifs.

1 Étude de la convergence.

2 Opérations sur les séries.

3 Résultats de comparaisons.

Exercice 7.

Soit (u_n) une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)!u_n \leqslant 1$ et $\sum u_n$ converge.
Montrez que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \mathrm{e} - 1$.

Exercice 8. ☢

Démontrez que la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n!}$ converge.

Exercice 9.

Déterminez la nature de la série $\sum \mathrm{e}^{-n^2}$ en remarquant $\mathrm{e}^{-n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 10.

Montrez que la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n2^n}$ est convergente.

Exercice 11.

Montrez que la série $\sum \dfrac{n\sqrt{n}}{2^n + \sqrt{n}}$ est convergente.

Exercice 12.

Déterminez la nature de la série $\sum \frac{n+1}{n^2}$.

Exercice 13.

Déterminez la nature de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 14.

Déterminez la nature de la série $\sum \frac{2n}{n^3+1}$.

VI Sommes doubles.

Exercice 15.

Calculez $S(n)$.

a) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i$.

b) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i,j} i + j$.

c) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i,j} ij$.

d) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i,j} 2^{2i-j}$.

Exercice 16.

Déterminez des expressions semblables à celles de la proposition précédente pour $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}$ et $\sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{ij}$.

Exercice 17.

Calculez $S(n)$.

a) $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

b) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$.

c) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.

d) $S(n) = \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} j$.

e) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \max(i,j)$.

VII Exercices.

Exercice 18.

Exercice 19. ☯

Déterminez la nature de la suite de terme général u_n.

a) $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$.

b) $u_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n}$.

c) $u_n = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$.

d) $u_n = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}\right)$.

e) $u_n = \frac{2^n}{1+n!}$.

f) $u_n = \frac{1}{n^2\ln(n)}$.

g) $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$.

h) $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

i) $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

j) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$.

k) $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$.

Exercice 20. ☢

Démontrez la convergence et déterminez (si possible) la somme des séries de terme général u_n.

a) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geqslant 1$.

b) $u_n = \frac{n^2 2^n}{n!}$.

c) $u_n = \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$.

d) $u_n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 21. ⚽

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs convergente. Déterminez la nature des séries dont le terme général est :

a) $u_n = \frac{a_n}{1+a_n}$.

b) $v_n = \mathrm{e}^{a_n} - 1$.

c) $w_n = \frac{1-\cos(a_n)}{a_n}$.

d) $x_n = a_n^2$.

Exercice 22. ⚽

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

1. Montrez : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
2. En remarquant un télescopage déduisez-en que la série $\sum u_n$ converge et calculez sa somme.

Exercice 23. ⚽