Séries de nombres réels.

I Généralités.

1 Définitions, vocabulaire.

Exercice 1. ⚽

Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que la série, dont le terme général est une constante, converge.

Exercice 2. ☯

Montrez que la série $\sum\limits_{n>0} \ln(n+1)-\ln(n)$ diverge mais qu'elle ne diverge pas grossièrement.

Correction de l'exercice 2

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \ln(n) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Or $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ donc, par continuité de ln, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.

Autrement dit : $(n+1) - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ou encore

$$\boxed{\sum \ln(n+1) - \ln(n) \text{ ne diverge pas grossièrement.}}$$

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) + \cdots + \ln(n-1) - \ln(n-2) + \ln(n) - \ln(n - \end{aligned}$$

On reconnaît un télescopage des termes de cette somme :

$$\begin{aligned} S_n &= \ln(n) - \ln(1) \\ &= \ln(n) \end{aligned}$$

Puisque $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Autrement dit, la somme des suites partielles divergeant,

$$\boxed{\sum_{n>0} \ln(n+1) - \ln(n) \text{ diverge.}}$$

Exercice 3. ⚽
Montrez que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-n-1}{n^2+n+1}$ diverge.

Correction de l'exercice 3

$\frac{n^2-n-1}{n^2+n+1} \sim 1$. Donc $\frac{n^2-n-1}{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

Donc $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-n-1}{n^2+n+1}$ diverge grossièrement et finalement

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-n-1}{n^2+n+1} \text{ diverge.}}$$

2 Convergence absolue.

II Des séries de référence.

1 Séries arithmétique.

2 Série des entiers.

3 Série des carrés.

4 Série des cubes.

5 Séries géométriques.

Exercice 4. ☯
Déterminez l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}_+^*$ tels que la série $\sum (\ln(\sqrt{x}))^n$ diverge.

Correction de l'exercice 4

$\sum (\ln(\sqrt{x}))^n$ converge si et seulement si $(\ln(\sqrt{x}))^n \in]-1;1[$.
Cette dernière appartenance équivaut successivement à :

$$-1 < \ln\left(\sqrt{x}\right) < 1$$

Puisque exponentielle est strictement croissante :

$$e^{-1} < \sqrt{x} < e^{1}$$

Puisque la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\left(e^{-1}\right)^2 < \left(\sqrt{x}\right)^2 < \left(e^{1}\right)^2$$
$$e^{-1\times 2} < x < e^{1\times 2}$$
$$x \in \left]e^{-2}, e^{2}\right[$$

Il ne reste qu'à considérer le complémentaire de cet ensemble dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{La série diverge si et seulement si } x \in \left]0,\mathrm{e}^{-2}\right] \cup \left[\mathrm{e}^2, +\infty\right[.}$$

6 Séries géométriques dérivées.

7 Séries de Riemann.

8 Série exponentielle.

Exercice 5. ☯

Justifiez la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n}{(n+1)!}$ et calculez sa somme.

Correction de l'exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On remarque que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{(k+1)!} = 1 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{4^{k+1}}{(k+1)!} = 1 + \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n} \frac{4^j}{j!}.$$

Or $\sum_{j\geqslant 0} \frac{4^j}{j!}$ converge vers e^4 donc

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n}{(n+1)!} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(n+1)!} = 1 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^4.}$$

9 Séries de Bertrand.

III La règle de d'Alembert.

Exercice 6.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

a) $u_n = \dfrac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$.

b) $u_n = n! \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{2^k}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$.

Correction de l'exercice 6

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{3^{2^{n+1}}}{2^{3^{n+1}}}}{\frac{3^{2^n}}{2^{3^n}}} \\
&= \frac{3^{2^{n+1}}}{2^{3^{n+1}}} \times \frac{2^{3^n}}{3^{2^n}} \\
&= \frac{3^{2^n \times 2}}{2^{3^n \times 3}} \times \frac{2^{3^n}}{3^{2^n}} \\
&= \frac{\left(3^{2^n}\right)^2}{\left(2^{3^n}\right)^3} \times \frac{2^{3^n}}{3^{2^n}} \\
&= \frac{3^{2^n}}{\left(2^{3^n}\right)^2} \\
&= \exp\left[2^n \ln(3) - 2 \times 3^n \ln(2)\right] \\
&= \exp\left[3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n \ln(3) - 2\ln(2)\right)\right]
\end{aligned}$$

On reconnaît une suite géométrique $\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, puisque $\ln(2) > 0$, $3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n \ln(3) - 2$ l
$-\infty$.

Puis par continuité de la fonction exponentielle : $\exp\left[3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n \ln(3) - 2\ln(2)\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ 0.

Ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'après la règle de d'Alembert :

$$\boxed{\sum_n \frac{3^{2^n}}{2^{3^n}} \text{ converge.}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Puisque $\frac{1}{2^{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \sim \frac{1}{2^{n+1}}$ donc, par produit : $(n+1)\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \sim \frac{n+1}{2^{n+1}} \sim \frac{1}{2} \times \frac{n}{2^n}$. Par croissance comparée : $\frac{n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Finalement $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et, d'après la règle de d'Alembert :

$$\boxed{\sum_n n! \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{2^k}\right) \text{ converge.}}$$

IV Le critère de Riemann.

V Séries à termes positifs.

1 Étude de la convergence.

2 Opérations sur les séries.

3 Résultats de comparaisons.

Exercice 7.

Soit (u_n) une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)!u_n \leqslant 1$ et $\sum u_n$ converge.
Montrez que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \mathrm{e} - 1$.

Exercice 8. ☢

Démontrez que la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n!}$ converge.

Correction de l'exercice 8

$\frac{\ln(n!)}{n!} \leqslant \frac{n\ln(n)}{n!}$ puis on applique la règle de d'Alembert.

Exercice 9.

Déterminez la nature de la série $\sum \mathrm{e}^{-n^2}$ en remarquant $\mathrm{e}^{-n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 10.

Montrez que la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n2^n}$ est convergente.

Correction de l'exercice 10

$\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{\ln(n)}{n2^n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Or $\sum \frac{1}{2^n}$ est positive et convergente donc il en est de même pour $\sum \frac{\ln(n)}{n2^n}$.

Exercice 11.

Montrez que la série $\sum \dfrac{n\sqrt{n}}{2^n + \sqrt{n}}$ est convergente.

Correction de l'exercice 11

1. $\frac{\frac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^3\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}}$. Or $\sqrt{n} = o(2^n)$ (ou $\lim \frac{\sqrt{n}}{2^n} = 0$ par croissance comparée) donc $2^n + \sqrt{n} \sim 2^n$. Puis par quotient : $\frac{n^3\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}} \sim \frac{n^3\sqrt{n}}{2^n} = \frac{n^{3,5}}{2^n}$. Enfin, par croissance comparée : $\frac{n^{3,5}}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit : $\frac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ de paramètre $\alpha = 2 > 1$ converge.
3. Les séries considérées sont à termes strictement positifs donc, d'après les ponts précédents

$$\boxed{\sum \frac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}} \text{ converge.}}$$

Exercice 12.

Déterminez la nature de la série $\sum \dfrac{n+1}{n^2}$.

Correction de l'exercice 12

$n+1 \sim n$ donc, par quotient, $\frac{n+1}{n^2} \sim\sim \frac{n}{n^2} \sim \frac{n\times 1}{n\times n} \sim \frac{1}{n}$.
$\sum \frac{1}{n}$ est la série de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leqslant 1$ (série harmonique) donc diverge.
D'où

$$\boxed{\sum \frac{n+1}{n^2} \text{ diverge.}}$$

Exercice 13.

Déterminez la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Correction de l'exercice 13

$n(n+1) \sim n^2$ donc $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$.
$\sum \frac{1}{n^2}$ est la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$ donc converge.
Donc

$$\boxed{\sum \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge.}}$$

Exercice 14.

Déterminez la nature de la série $\sum \dfrac{2n}{n^3+1}$.

Correction de l'exercice 14

$n^3+1 \sim n^3$ donc $\frac{2n}{n^3+1} \sim \frac{2n}{n^3} \sim 2 \times \frac{1}{n^2}$.
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ de paramètre $\alpha = 2 > 1$ converge donc $\sum 2\frac{1}{n^2}$ converge.
Finalement

$$\boxed{\sum \frac{2n}{n^3+1} \text{ converge.}}$$

VI Sommes doubles.

Exercice 15.

Calculez $S(n)$.

a) $S(n) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i$.

b) $S(n) = \sum_{1\leqslant i,j} i + j$.

c) $S(n) = \sum_{1\leqslant i,j} ij$.

d) $S(n) = \sum_{1\leqslant i,j} 2^{2i-j}$.

Exercice 16.

Déterminez des expressions semblables à celles de la proposition précédente pour $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}$ et $\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{ij}$.

Correction de l'exercice 16

0	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	$\sum_{j=2}^n a_{1j}$
0	0	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	$\sum_{j=3}^n a_{2j}$
0	0	0	$\dots$	a_{3n}	$\sum_{j=4}^n a_{3j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	$\dots$	0	$\sum_{j=1}^n a_{nj}$
				Total :	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_{ij}$

0	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	
0	0	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	
0	0	0	$\dots$	a_{3n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
0	0	0	$\dots$	0	Total :
0	$\sum_{i=1}^{2-1} a_{i2}$	$\sum_{i=1}^{3-1} a_{i3}$	$\dots$	$\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}$	$\sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$

Exercice 17.

Calculez $S(n)$.

a) $S(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.

b) $S(n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i$.

c) $S(n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$.

d) $S(n) = \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} j$.

e) $S(n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \max(i,j)$.

VII Exercices.

Exercice 18.

Exercice 19.

Déterminez la nature de la suite de terme général u_n.

a) $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$.

b) $u_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n}$.

c) $u_n = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$.

d) $u_n = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}\right)$.

e) $u_n = \frac{2^n}{1+n!}$.

f) $u_n = \frac{1}{n^2\ln(n)}$.

g) $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$.

h) $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

i) $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

j) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$.

k) $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$.

Correction de l'exercice 19

a) $0 \leqslant \frac{|\cos(n)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

b) $u_n = \frac{1}{2\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1\right)}$. $2\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1\right) \sim 4\sqrt{n}$.

c) $u_n = \exp\left[n\left(\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)-\ln(3)\right)\right]$.

d) $u_n = \ln\left[1+\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}-1\right)\right] \sim \frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1} - 1 \sim \frac{1}{n^2+3n+1} \sim \frac{1}{n^2}$.

e) $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2^n}{n!}$.

f) Série de Bertrand ou pour $n \geqslant 3$, $u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$.

g) Série de Bertrand ou pour $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

h) $u_n \leqslant \frac{2}{n^2}$.

i) Critère de Riemann $\alpha = 2$.

j) Critère De Riemann $\alpha = \frac{3}{2}$.

Exercice 20.

Démontrez la convergence et déterminez (si possible) la somme des séries de terme général u_n.

a) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geqslant 1$.

b) $u_n = \frac{n^2 2^n}{n!}$.

c) $u_n = \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$.

d) $u_n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 21. ⚽

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs convergente. Déterminez la nature des séries dont le terme général est :

a) $u_n = \frac{a_n}{1+a_n}$.

b) $v_n = \mathrm{e}^{a_n} - 1$.

c) $w_n = \frac{1-\cos(a_n)}{a_n}$.

d) $x_n = a_n^2$.

Exercice 22. ⚽

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

1. Montrez : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
2. En remarquant un télescopage déduisez-en que la série $\sum u_n$ converge et calculez sa somme.

Exercice 23. ⚽