Séries de nombres réels.

I Généralités.

1 Définitions, vocabulaire.

Définition 1

Soit :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On appelle *série de terme général u_n* la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *sommes partielles* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous noterons $\sum u_n$ la série de terme général u_n.
Si $(S_n)_n$ converge alors nous dirons que la série $\sum u_n$ converge. Sinon nous dirons qu'elle diverge.
Si $\sum u_n$ converge alors la limite de (S_n) est appelée *la somme de la série* et est notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exemples.

1. Aux suites de référence nous associerons des séries : $\sum n$, $\sum n^2$, $\sum q^n$, $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n!}$, …
2. Soit $q \in \mathbb{R}$.
   Si $q > 1$ alors la série $\sum q^n$ diverge.
   Si $-1 < q < 1$ alors la série $\sum q^n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
   Ces résultats découlent du fait que, pour la suite géométrique $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$.

Remarques.

1. Ainsi les séries sont un cas particulier de suites que l'on obtient à partir d'autres suites. Tous les résultats connus sur les suites peuvent donc leur être appliqués.
2. $\sum u_n$ désigne la série (donc une suite en fait) et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne une nombre à savoir la limite de la série.
3. Nous appellerons nature d'une série le fait qu'elle soit convergente ou pas.
   Les exercices consisterons très souvent à :
   (i) déterminez la nature de la série (convergente ou divergente),

(ii) si elle est convergente, déterminer sa somme.

4. De même qu'il y a des suites de référence, il y a de séries de référence à connaître absolument. Nous les étudierons au fur et à mesure mais nommons-les tout de suite.
   (i) Séries arithmétiques : $\sum n$.
   (ii) Série des carrés : $\sum n^2$.
   (iii) Série des cubes : $\sum n^3$.
   (iv) Séries géométriques : $\sum q^n$, pour $q \in \mathbb{R}$.
   (v) Séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (vi) Série exponentielle : $\sum \frac{x^n}{n!}$ où $x \in \mathbb{R}$.
5. Il est possible de retrouver la suite à partir de la série : $u_n = \sum (u_n - u_{n-1})$.

Exercice 1. ⚽

Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que la série, dont le terme général est une constante, converge.

Proposition 1 - Condition nécessaire de convergence.

Soit :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration

$u_n = S_n - S_{n-1}$ et il reste à passer à la limite.

■

Remarques.

1. Nous utiliserons ce résultat le plus souvent pour démontrer qu'une série diverge.
2. Ce résultat doit nous rappeler que si une série converge alors, à partir d'un certain rang, u_n est assez proche de 0, ce qui permet de faire apparaître des majorations souvent intéressantes.

Définition 2

Soit :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Nous dirons que $\sum u_n$ *diverge grossièrement* si et seulement si (u_n) ne tend pas vers 0.

Exemples.

1. $\sum \frac{1}{n^2}$ ne diverge pas grossièrement (et nous verrons qu'elle converge).
2. La série $\sum \frac{1}{n}$ ne diverge pas grossièrement. Et pourtant elle diverge.
3. $\sum n$ diverge grossièrement.
4. $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge grossièrement.
5. $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement

Remarques.

1. La formulation n'est pas trompeuse, une série qui diverge grossièrement, diverge.
2. Il est des séries qui diverge sans diverger grossièrement.

Exercice 2. ☯

Montrez que la série $\sum\limits_{n>0} \ln(n+1)-\ln(n)$ diverge mais qu'elle ne diverge pas grossièrement.

Correction de l'exercice 2

* Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)-\ln(n)=\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(n)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Or $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}=1$ donc, par continuité de ln, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ln(1)=0$.
  Autrement dit : $(n+1)-\ln(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Ou encore

  $\sum \ln(n+1)-\ln(n)$ ne diverge pas grossièrement.

* Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\ln(k)\\ &= \ln(2)-\ln(1)+\ln(3)-\ln(2)+\ln(4)-\ln(3)+\cdots+\ln(n-1)-\ln(n-2)+\ln(n)-\ln(n-\end{aligned}$$

On reconnaît un télescopage des termes de cette somme :

$$\begin{aligned} S_n &= \ln(n) - \ln(1) \\ &= \ln(n) \end{aligned}$$

Puisque $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Autrement dit, la somme des suites partielles divergeant,

$$\boxed{\sum_{n>0} \ln(n+1) - \ln(n) \text{ diverge.}}$$

Exercice 3.

Montrez que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2 - n - 1}{n^2 + n + 1}$ diverge.

Correction de l'exercice 3

$\frac{n^2-n-1}{n^2+n+1} \sim 1$. Donc $\frac{n^2-n-1}{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2 - n - 1}{n^2 + n + 1}$ diverge grossièrement et finalement

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2 - n - 1}{n^2 + n + 1} \text{ diverge.}}$$

2 Convergence absolue.

Nous nous intéresserons principalement aux séries à termes positifs. Bien entendu il existe des suites qui ne le sont pas. Nous allons voir un résultat qui nous permettra souvent, à partir d'une série quelconque, de nous ramener à l'étude d'une série à termes positifs.

Définition 3

Nous dirons que $\sum u_n$ *converge absolument* si et seulement si $\sum |u_n|$ converge.

Exemples.

1.
2. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

Remarques.

1. La série $\sum |u_n|$ est formée des mêmes termes que $\sum u_n$ au signe près, puisque $|u_n|$ est toujours positif.
2. Toute série convergente à termes positifs converge absolument.

Théorème 1 - Lien entre convergence et convergence absolue.

Toutes série réelle absolument convergente est convergente.

De plus, si $\sum u_n$ est absolument convergente :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration

Complétude de $\mathbb{R}$ et critère de Cauchy ou plus élémentaire : $\sum \frac{|u_n|+u_n}{2}$ et $\sum \frac{|u_n|-u_n}{2}$ avec résultats sur les sommes.

■

Exemples.

1. $\sum \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ converge absolument.
2. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas absolument et pourtant elle converge.

Remarques.

1. Ainsi, il suffit que la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge, pour que nous puissions affirmer que $\sum u_n$ (qui n'est pas forcément à termes positifs) converge. Nous l'utiliserons quasi-systématiquement pour étudier les séries qui ne sont pas à termes positifs.
2. La réciproque est fausse : il existe des séries qui converge sans converger absolument.

II Des séries de référence.

1 Séries arithmétique.

Proposition 2

$\sum rn + u_0$ converge si et seulement si $r = u_0 = 0$.

2 Série des entiers.

Proposition 3

$\sum n$ diverge vers $+\infty$ et $\sum n \sim \frac{1}{2}n^2$.

Démonstration

En utilisant l'expression explicite des sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\blacksquare$

3 Série des carrés.

Proposition 4

$\sum n^2$ diverge vers $+\infty$ et $\sum n^2 \sim \frac{1}{3}n^3$.

Démonstration

En utilisant l'expression explicite des sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$\blacksquare$

4 Série des cubes.

Proposition 5

$\sum n^3$ diverge vers $+\infty$ et $\sum n^3 \sim \frac{1}{4}n^4$.

Démonstration

En utilisant l'expression explicite des sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$\blacksquare$

5 Séries géométriques.

Proposition 6

Soit $q \in \mathbb{R}$.

$\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Si cette série converge alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Démonstration

En utilisant l'expression explicite des sommes partielles :

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

■

Exercice 4. ☯

Déterminez l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}_+^*$ tels que la série $\sum (\ln(\sqrt{x}))^n$ diverge.

Correction de l'exercice 4

$\sum (\ln(\sqrt{x}))^n$ converge si et seulement si $(\ln(\sqrt{x}))^n \in]-1;1[$.

Cette dernière appartenance équivaut successivement à :

$$-1 < \ln\left(\sqrt{x}\right) < 1$$

Puisque exponentielle est strictement croissante :

$$\mathrm{e}^{-1} < \sqrt{x} < \mathrm{e}^{1}$$

Puisque la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^2 < \left(\sqrt{x}\right)^2 < \left(\mathrm{e}^{1}\right)^2$$

$$\mathrm{e}^{-1\times 2} < x < \mathrm{e}^{1\times 2}$$

$$x \in \left]\mathrm{e}^{-2}, \mathrm{e}^{2}\right[$$

Il ne reste qu'à considérer le complémentaire de cet ensemble dans $\mathbb{R}_+^*$.

La série diverge si et seulement si $x \in \left]0, \mathrm{e}^{-2}\right] \cup \left[\mathrm{e}^{2}, +\infty\right[$.

6 Séries géométriques dérivées.

Proposition 7

Soit $q \in \mathbb{R}$.

$\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$ et en cas de convergence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Démonstration

En raisonnant sur la dérivée des sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} x^k$.

■

7 Séries de Riemann.

Proposition 8

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Si $\alpha \leqslant 0$ alors divergence grossière.

Si $\alpha > 0$ il faut utiliser une comparaison série-intégrale. Ou remarquer $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$.

■

Remarques.

1. Si $\alpha = 1$ alors on retrouve la série harmonique.
2. Si $\alpha = 2$ on obtient une série convergente de plus sa somme notée $\zeta(2)$ (zêta de 2) est à connaître : $\zeta(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
3. La série harmonique alternée, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, qui ne relève pas des séries de Riemann, est convergente.

8 Série exponentielle.

Proposition 9

$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge quelque soit $x \in \mathbb{R}$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Démonstration

Découle de l'application de la règle de d'Alembert ci-dessous.

■

Exercice 5. ☯

Justifiez la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n}{(n+1)!}$ et calculez sa somme.

Correction de l'exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On remarque que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{(k+1)!} = 1 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{4^{k+1}}{(k+1)!} = 1 + \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n} \frac{4^j}{j!}.$$

Or $\sum_{j\geqslant 0} \frac{4^j}{j!}$ converge vers e^4 donc

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n}{(n+1)!} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(n+1)!} = 1 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^4.$$

Via les nombres complexes il est possible de déduire du précédent résultat celui-ci.

Proposition 10

$$\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

9 Séries de Bertrand.

Proposition 11

La série de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

III La règle de d'Alembert.

Théorème 2 - Règle de d'Alembert.

Soient :

. (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

(i) Si $0 \leqslant \ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemples.

1. Si $u_n = \frac{n!}{n^n}$ alors la série à termes strictement positifs $\sum u_n$ converge d'après la Règle de d'Alembert puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1}$. En effet $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc par produit $-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \sim -1$. D'où le passage à la limites. Puisque $\mathrm{e}^{-1} < 1$ on peut conclure.

Remarques.

1. L'idée est de dire que si, au voisinage de l'infini, la suite se comporte comme une suite géométrique alors sa série est de la même nature que la série géométrique correspondante.
2. Ce résultat permet d'établir la nature mais pas la somme en cas de convergence.
3. Ce théorème s'utilise tout particulièrement lorsque le terme général contient des exponentielles (suites géométriques) ou des puissances entières.
4. Puisque la série est positive on a forcément $\ell \geqslant 0$. Ce n'est pas une condition indispensable.
5. Si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge ou converge vers 1 on ne peut rien conclure.

Exercice 6.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

a) $u_n = \dfrac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$.

b) $u_n = n!\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{1}{2^k}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$.

Correction de l'exercice 6

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{3^{2^{n+1}}}{2^{3^{n+1}}}}{\frac{3^{2^n}}{2^{3^n}}} \\
&= \frac{3^{2^{n+1}}}{2^{3^{n+1}}} \times \frac{2^{3^n}}{3^{2^n}} \\
&= \frac{3^{2^n \times 2}}{2^{3^n \times 3}} \times \frac{2^{3^n}}{3^{2^n}} \\
&= \frac{\left(3^{2^n}\right)^2}{\left(2^{3^n}\right)^3} \times \frac{2^{3^n}}{3^{2^n}} \\
&= \frac{3^{2^n}}{\left(2^{3^n}\right)^2} \\
&= \exp\left[2^n \ln(3) - 2 \times 3^n \ln(2)\right] \\
&= \exp\left[3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n \ln(3) - 2\ln(2)\right)\right]
\end{aligned}$$

On reconnaît une suite géométrique $\left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, puisque $\ln(2) > 0$, $3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n \ln(3) - 2\,\mathrm{l}$
$-\infty$.

Puis par continuité de la fonction exponentielle : $\exp\left[3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n \ln(3) - 2\ln(2)\right)\right] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'après la règle de d'Alembert :

$$\boxed{\sum_n \frac{3^{2^n}}{2^{3^n}} \text{ converge.}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Puisque $\frac{1}{2^{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \sim \frac{1}{2^{n+1}}$ donc, par produit : $(n+1)\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \sim \frac{n+1}{2^{n+1}} \sim \frac{1}{2} \times \frac{n}{2^n}$. Par croissance comparée : $\frac{n}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Finalement $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et, d'après la règle de d'Alembert :

$$\boxed{\sum_n n! \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{2^k}\right) \text{ converge.}}$$

IV Le critère de Riemann.

Théorème 3 - Critère de Riemann.

Soient :

. $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $n^\alpha u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemples.

1.

Remarques.

1. Une autre version de ce résultat.
   - S'il existe $\alpha > 1$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $n^\alpha u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\sum u_n$ converge.
   - S'il existe $\alpha \leqslant 1$ et $\ell \in \mathbb{R}^* \cup \{+\infty; -\infty\}$ tels que $n^\alpha u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\sum u_n$ diverge.

V Séries à termes positifs.

1 Étude de la convergence.

Proposition 12 - Lemme fondamental.

(i) Une série à termes positifs converge ou tend vers $+\infty$.

(ii) Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration

Le résultat est une application directe du théorème de la limite monotone appliqué à la suite des sommes partielles de la série.

■

2 Opérations sur les séries.

Il existe bien entendu des produits sur les séries. Cependant leur définition est complexe et nous laisserons donc le produit de côté il nous reste la somme et la multiplication par un réel (donc les combinaisons linéaires.

Nous noterons $\alpha \sum u_n + \sum v_n$ la série $\sum \alpha u_n + v_n$.

Proposition 13 - Somme de série et nature.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors $\sum \alpha u_n + v_n$ converge.
S'il y a convergence alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha u_n + v_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Exemples.

1. $\sum \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n^\alpha}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$, est convergente car c'est une combinaison linéaire de deux séries convergentes.

Remarques.

1. Autrement dit l'ensemble des séries convergentes est stable par combinaisons linéaires.
2. Ce résultat reste valable même si les séries ne sont pas à termes positifs.

Une petite extension du résultat précédent mais surtout une façon de voir différemment les choses.

Proposition 14

On ne change pas la nature d'une série en lui ajoutant une série convergente.

Démonstration

Si les deux suites sont convergentes nous retombons sur le résultat précédent.
Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors nécessairement $\sum u_n + v_n$ diverge.
Car la convergence de $\sum u_n + v_n$ entraînerait celle de $\sum v_n$ puisque $v_n = (v_n - u_n) + u_n$.

■

Exemples.

1. $\sum \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$ diverge.
2. $\sum \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$ diverge et $\sum \frac{-1}{n}$ diverge et pourtant la série somme converge.
3. $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\frac{2}{n}$ diverge donc la somme de deux séries divergente peut aussi diverger.

3 Résultats de comparaisons.

Proposition 15

Soient (u_n) et (v_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

(i) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge. De plus :

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Exemples.

1. $u_n = \frac{\sin^2(n)}{n^2}$. $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (exemple de Riemann avec $\alpha = 2$) donc $\sum u_n$ converge. De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2.

Exercice 7.

Soit (u_n) une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)!u_n \leqslant 1$ et $\sum u_n$ converge.
Montrez que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \mathrm{e} - 1$.

Exercice 8. ☢

Démontrez que la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n!}$ converge.

Correction de l'exercice 8

$\frac{\ln(n!)}{n!} \leqslant \frac{n \ln(n)}{n!}$ puis on applique la règle de d'Alembert.

Proposition 16

Si (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs, $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Exemples.

1.

Remarques.

1. Nous ne pouvons rien déduire quant à la somme des séries.

2. Nous en déduisons : si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge absolument.
3. Ainsi si une suite est négligeable devant une suite de référence dont la série converge alors sa série converge également.

Exercice 9.

Déterminez la nature de la série $\sum \mathrm{e}^{-n^2}$ en remarquant $\mathrm{e}^{-n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 10.

Montrez que la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n2^n}$ est convergente.

Correction de l'exercice 10

$\frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{\ln(n)}{n2^n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Or $\sum \frac{1}{2^n}$ est positive et convergente donc il en est de même pour $\sum \frac{\ln(n)}{n2^n}$.

Exercice 11.

Montrez que la série $\sum \dfrac{n\sqrt{n}}{2^n + \sqrt{n}}$ est convergente.

Correction de l'exercice 11

1. $\frac{\frac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^3\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}}$. Or $\sqrt{n} = o(2^n)$ (ou $\lim \frac{\sqrt{n}}{2^n} = 0$ par croissance comparée) donc $2^n + \sqrt{n} \sim 2^n$. Puis par quotient : $\frac{n^3\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}} \sim \frac{n^3\sqrt{n}}{2^n} = \frac{n^{3,5}}{2^n}$. Enfin, par croissance comparée : $\frac{n^{3,5}}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit : $\frac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ de paramètre $\alpha = 2 > 1$ converge.
3. Les séries considérées sont à termes strictement positifs donc, d'après les ponts précédents

$$\boxed{\sum \frac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}} \text{ converge.}}$$

Proposition 17

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes strictement positifs et $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemples.

1. $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{(n+1)^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ est aussi convergente. Mais leurs somme sont distinctes : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.
2. $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n+1}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge.
3. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ diverge et pourtant $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. Ceci s'explique par le fait que l'une des série n'est pas à termes positifs.
4. $u_n = \ln\left(1 + \frac{5}{n}\right) - \frac{1}{n^2}$. $\ln\left(1 + \frac{5}{n}\right) \sim \frac{5}{n}$ donc $\ln\left(1 + \frac{5}{n}\right) = \frac{5}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. $\ln\left(1 + \frac{5}{n}\right) - \frac{1}{n^2} = \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{5}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Enfin : $\ln\left(1 + \frac{5}{n}\right) - \frac{1}{n^2} \sim \frac{5}{n}$. Donc $\sum u_n$ diverge.

Remarques.

1. Ce résultat n'est valable que pour les suites à termes positifs.

Exercice 12.

Déterminez la nature de la série $\sum \dfrac{n+1}{n^2}$.

Correction de l'exercice 12

$n + 1 \sim n$ donc, par quotient, $\frac{n+1}{n^2} \sim\sim \frac{n}{n^2} \sim \frac{n \times 1}{n \times n} \sim \frac{1}{n}$.
$\sum \frac{1}{n}$ est la série de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leqslant 1$ (série harmonique) donc diverge.
D'où

$$\boxed{\sum \frac{n+1}{n^2} \text{ diverge.}}$$

Exercice 13.

Déterminez la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Correction de l'exercice 13

$n(n+1) \sim n^2$ donc $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$.
$\sum \frac{1}{n^2}$ est la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$ donc converge.
Donc

$$\boxed{\sum \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge.}}$$

Exercice 14.

Déterminez la nature de la série $\sum \dfrac{2n}{n^3+1}$.

Correction de l'exercice 14

$n^3 + 1 \sim n^3$ donc $\frac{2n}{n^3+1} \sim \frac{2n}{n^3} \sim 2 \times \frac{1}{n^2}$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ de paramètre $\alpha = 2 > 1$ converge donc $\sum 2\frac{1}{n^2}$ converge.

Finalement

$$\boxed{\sum \frac{2n}{n^3+1} \text{ converge.}}$$

VI Sommes doubles.

Exemples.

1. Soient a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4 des réels. Donnons l'écriture en extension de la somme : $S = \left(\sum_{i=1}^3 a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^4 b_j\right)$.
   Nous en déduisons d'autres écriture de la même somme.

Proposition 18 - Somme double à indices indépendants.

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls.

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Démonstration

Toutes ses sommes existent puisqu'il s'agit de sommes finies. Comme de plus l'addition est associative nous pouvons additionner les termes dans l'ordre qui nous convient. La présentation usuelle de tous les termes de cette somme est celle d'un tableau :

a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1m}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	a_{2m}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\dots$	a_{3m}
a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	$\dots$	a_{nm}

Ce tableau est composé de n lignes et m colonnes.

Si nous sommons les termes de chaque ligne :

a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1m}	$\sum_{j=1}^{m} a_{1j}$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	a_{2m}	$\sum_{j=1}^{m} a_{2j}$
a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\dots$	a_{3m}	$\sum_{j=1}^{m} a_{3j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	$\dots$	a_{nm}	$\sum_{j=1}^{m} a_{nj}$
				Total :	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$

Si nous sommons les termes de chaque colonne :

a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1m}	
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	a_{2m}	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\dots$	a_{3m}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	$\dots$	a_{nm}	Total :
$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} a_{i2}$	$\sum_{i=1}^{n} a_{i3}$	$\dots$	$\sum_{i=1}^{n} a_{im}$	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$

■

Remarques.

1. ij signifie ici i et j et non $i \times j$.

Exercice 15.

Calculez $S(n)$.

a) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i$.

b) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i,j} i + j$.

c) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i,j} ij$.

d) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i,j} 2^{2i-j}$.

Proposition 19 - Somme double à indices dépendants.

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij}.$$

Démonstration

Somme triangulaire suivant les lignes puis les colonnes.

■

Exercice 16.

Déterminez des expressions semblables à celles de la proposition précédente pour $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}$ et $\sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{ij}$.

Correction de l'exercice 16

0	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	$\sum_{j=2}^{n} a_{1j}$
0	0	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	$\sum_{j=3}^{n} a_{2j}$
0	0	0	$\dots$	a_{3n}	$\sum_{j=4}^{n} a_{3j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	$\dots$	0	$\sum_{j=1}^{n} a_{nj}$
				Total :	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}$

0	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	
0	0	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	
0	0	0	$\dots$	a_{3n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
0	0	0	$\dots$	0	Total :
0	$\sum_{i=1}^{2-1} a_{i2}$	$\sum_{i=1}^{3-1} a_{i3}$	$\dots$	$\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}$	$\sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$

Exercice 17.

Calculez $S(n)$.

a) $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

b) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$.

c) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.

d) $S(n) = \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} j$.

e) $S(n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \max(i,j)$.

VII Exercices.

Exercice 18.

Exercice 19. ☯

Déterminez la nature de la suite de terme général u_n.

a) $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$.

b) $u_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n}$.

c) $u_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n$.

d) $u_n = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}\right)$.

e) $u_n = \frac{2^n}{1+n!}$.

f) $u_n = \frac{1}{n^2 \ln(n)}$.

g) $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$.

h) $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

i) $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

j) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$.

k) $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$.

Correction de l'exercice 19

a) $0 \leqslant \frac{|\cos(n)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

b) $u_n = \frac{1}{2\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1\right)}$. $2\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1\right) \sim 4\sqrt{n}$.

c) $u_n = \exp\left[n\left(\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)-\ln(3)\right)\right]$.

d) $u_n = \ln\left[1+\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}-1\right)\right] \sim \frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}-1 \sim \frac{1}{n^2+3n+1} \sim \frac{1}{n^2}$.

e) $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2^n}{n!}$.

f) Série de Bertrand ou pour $n \geqslant 3$, $u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$.

g) Série de Bertrand ou pour $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

h) $u_n \leqslant \frac{2}{n^2}$.

i) Critère de Riemann $\alpha = 2$.

j) Critère De Riemann $\alpha = \frac{3}{2}$.

Exercice 20. ☢

Démontrez la convergence et déterminez (si possible) la somme des séries de terme général u_n.

a) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geqslant 1$.

b) $u_n = \frac{n^2 2^n}{n!}$.

c) $u_n = \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$.

d) $u_n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 21. ⚽

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs convergente. Déterminez la nature des séries dont le terme général est :

a) $u_n = \frac{a_n}{1+a_n}$.

b) $v_n = \mathrm{e}^{a_n} - 1$.

c) $w_n = \frac{1-\cos(a_n)}{a_n}$.

d) $x_n = a_n^2$.

Exercice 22. ⚽

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

1. Montrez : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
2. En remarquant un télescopage déduisez-en que la série $\sum u_n$ converge et calculez sa somme.

Exercice 23. ⚽