Analyse asymptotique de suites.

I Suites négligeables.

Définition 1

Nous dirons que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Dans ce cas nous écrirons $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et on dit que u_n est un petit o de v_n.

Proposition 1 - Des propriétés en vrac.

- Si (u_n) est bornée et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ alors $u_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = (w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n \times w_n = o(u_n \times w_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(r_n)$ alors $u_n \times w_n = o(v_n \times r_n)$.

II Suites équivalentes.

Définition 2

Nous dirons que (u_n) et (v_n) sont équivalentes si $\frac{u_n}{v_n} \underset{\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Dans ce cas nous écrirons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Proposition 2 - Des équivalents de référence.

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors

- $\sin(u_n) \sim u_n$.
- $\tan(u_n) \sim u_n$.
- $\ln(1+u_n) = u_n$.
- $\mathrm{Arctan}(u_n) \sim u_n$.
- $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$.
- $\cos(u_n) \sim 1$.
- $\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \dfrac{u_n}{2}$.
- $\cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.

Proposition 3 - Des propriétés de l'équivalence.

- Si $u_n \sum v_n$ alors $v_n \sum u_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n = o(u_n)$ alors $w_n = o(v_n)$.
- Si $u_n \sim$ alors (u_n) et (v_n) sont du même du signe à partir d'un certain rang.
- Si $u_n \sim v_n$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \sim \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ alors $u_n \sim v_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim r_n$ alors $u_n \times w_n \sim v_n \times r_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim r_n$ alors $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{r_n}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n \sim v_n$ alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.
- Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $u_n \sim w_n$ alors $v_n \sim u_n \sim w_n$.

III Lien entre négligeable et équivalent.

Théorème 1

$u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$, ou encore si et seulement si $u_n - v_n = o(u_n)$.

IV Exercices.