

Analyse asymptotique de suites.

I Suites négligeables.

II Suites équivalentes.

III Lien entre négligeable et équivalent.

IV Exercices.

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| < \sqrt{n} + \frac{1}{n}$.
Montrez que $u_n = o(n)$.

Exercice 2.

Justifiez que $n^2 + 1 = o(2^n)$.

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminez un équivalent de $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

Exercice 4.

Donnez un équivalent simple et la limite de $\frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$

Exercice 5.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, une suite positive vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2(2n+1)}{\pi} \leq u_n^2 \leq \frac{(2n+1)^2}{n\pi}.$$

Déterminez un équivalent de u_n .

Exercice 6.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n^2 \ln\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$.
Déterminez la limite de (u_n) .

Exercice 7.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$.

Déterminez la limite de (u_n) .

Exercice 8.

Déterminez un équivalent de la suite de terme général $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 9.

Donnez un équivalent simple en $+\infty$ des suites dont on donne le terme général.

a) $u_n = \frac{(3n+12)(2n+5)}{(2n+2022)(3n^2+7n-14)}$.

b) $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

c) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.

d) $u_n = 3^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

e) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$.

f) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$.

g) $u_n = e^{-n} + e^{-2n}$.

h) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

i) $u_n = \ln(1+n) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

j) $u_n = \sin(n^2 + 1) - \sqrt{n}$.

k) $u_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} - \ln(n)$.

l) $u_n = n^2 + n - \ln(n^3 + n)$.

m) $u_n = \text{Arctan}(n^2 - n) + \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

n) $u_n \sin\left(\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$.

Exercice 10.

1. Montrez que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

2. Déduisez-en un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Exercice 11.

Trouvez un équivalent simple de la suite définie par $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Exercice 12.

Trouvez un équivalent simple de

$$u_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$$

Exercice 13.