Analyse asymptotique de suites.

I Suites négligeables.

II Suites équivalentes.

III Lien entre négligeable et équivalent.

IV Exercices.

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| < \sqrt{n} + \frac{1}{n}$.
Montrez que $u_n = o(n)$.

Exercice 2.

Justifiez que $n^2 + 1 = o(2^n)$.

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminez un équivalent de $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

Exercice 4.

Donnez un équivalent simple et la limite de $\frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$

Exercice 5.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite positive vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2(2n+1)}{\pi} \leqslant u_n^2 \leqslant \frac{(2n+1)^2}{n\pi}.$$

Déterminez un équivalent de u_n.

Exercice 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n^2 \ln\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$.
Déterminez la limite de (u_n).

Exercice 7.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$.

Déterminez la limite de (u_n).

Exercice 8.

Déterminez un équivalent de la suite de terme général $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 9.

Donnez un équivalent simple en $+\infty$ des suites dont on donne le terme général.

a) $u_n = \frac{(3n+12)(2n+5)}{(2n+2022)(3n^2+7n-14)}$.

b) $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

c) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.

d) $u_n = 3^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

e) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$.

f) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$.

g) $u_n = \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n}$.

h) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

i) $u_n = \ln(1+n) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

j) $u_n = \sin(n^2+1) - \sqrt{n}$.

k) $u_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} - \ln(n)$.

l) $u_n = n^2 + n - \ln(n^3+n)$.

m) $u_n = \mathrm{Arctan}(n^2 - n) + \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

n) $u_n \sin\left(\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$.

Correction de l'exercice 9

a) Équivalents polynômes et produits quotients : $u_n \sim \frac{1}{n}$.

b) $\frac{\pi}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et équivalent de référence : $u_n \sim \frac{\pi}{2n}$.

c) $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $u_n \sim \frac{1}{n}$.

d) $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et équivalent de référence : $u_n \sim 3^n \times \frac{1}{2^n} \sim \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

e) On peut se ramener à une situation produit quotient : $u_n = -\frac{1}{n(n-1)}$ donc $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$.

f) $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$.

g) $\mathrm{e}^{-2n} = o\left(\mathrm{e}^{-n}\right)$ donc $u_n \sim \mathrm{e}^{-n}$.

h) $\frac{1}{n} = o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

i) $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et équivalent de référence $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(\ln(n))$ donc $\ln(n+1) \sim \ln(n)$. Puis par produit $u_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

j) $\sin(n^2+1)$ est bornée et $-\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $u_n = -\sqrt{n} + o(-\sqrt{n})$. Autrement dit $u_n \sim -\sqrt{n}$.

k) $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \sim n$ donc $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = n + o(n)$. D'où $u_n = n + o(n) - \ln(n) = n + o(n)$. $u_n \sim n$.

l) $u_n = n^2 + n - 3\ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Donc $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'où $u_n = n^2 + n + o(n^2) \sim n^2$

Exercice 10.

1. Montrez que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$
2. Déduisez-en un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Exercice 11.

Trouvez un équivalent simple de la suite définie par $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Exercice 12.

Trouvez un équivalent simple de

$$u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}.$$

Exercice 13.