Analyse asymptotique de suites.

Dans ce cours on considère des suites toutes non nulles à partir d'un certain rang.

I Suites négligeables.

Définition 1

Nous dirons que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Dans ce cas nous écrirons $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et on dit que u_n est un petit o de v_n.

Exemples.

1. Pour $0 < \alpha < \beta$, $n^\alpha = o\left(n^\beta\right)$ et $\frac{1}{n^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.
2. Nous retrouvons les résultats de puissances comparées pour α et β des réels positifs et $q > 1$:
   $(\ln(n))^\beta = o(n^\alpha)$, $n^\alpha = o(q^n)$, $q^n = o(n!)$ et $n! = o(n^n)$.
   Et avec les inverses pour α et β des réels positifs et $|q| < 1$: :
   $\frac{1}{n^n} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$, $\frac{1}{n!} = o(q^n)$, $q^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{(\ln(n))^\beta}\right)$.
3. Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
4. Dire que $u_n = o(1)$ signifie $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarques.

1. Il s'agit d'un outil de comparaison asymptotique. Il permet de comparer la vitesse de convergence de deux suites. Si $u_n = o(v_n)$ alors (v_n) l'emporte sur (u_n) au voisinage de $+\infty$.
2. Nos avons obtenu une échelle des croissances comparées : ?
3. Nous écrirons souvent : $u_n = v_n + o(w_n)$ ce que nous interpréterons en disant que u_n et v_n diffèrent par une suite qui est négligeable devant (w_n).

Proposition 1 - Des propriétés en vrac.

- Si (u_n) est bornée et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ alors $u_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = (w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n \times w_n = o(u_n \times w_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(r_n)$ alors $u_n \times w_n = o(v_n \times r_n)$.

II Suites équivalentes.

Définition 2

Nous dirons que (u_n) et (v_n) sont équivalentes si $\frac{u_n}{v_n} \underset{\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Dans ce cas nous écrirons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Exemples.

1. $n + \frac{1}{n} \sim n$.
2. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n}$.
3. $\frac{4n^3+2}{n^2+7n} \sim 4$.

Remarques.

1. Une suite ne peut être équivalente à 0, ça n'a pas de sens.

Proposition 2 - Des équivalents de référence.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

- $\sin(u_n) \sim u_n$.
- $\tan(u_n) \sim u_n$.
- $\ln(1+u_n) = u_n$.
- $\mathrm{Arctan}(u_n) \sim u_n$.
- $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$.
- $\cos(u_n) \sim 1$.
- $\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \dfrac{u_n}{2}$.
- $\cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.

Exemples.

1. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.
2. $-2n^4 + 3n^2 + 8n \sim -2n^4$. Une suite polynomiale équivaut a son monôme de plus haut degré.
3. Nous déduisons de l'exemple précédent, pour une expression rationnelle : $\frac{2n^3+n+1}{-5n^7+3n^4} \sim \frac{2n^3}{-5n^7} \sim -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{n^2}$
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^n + n^2 \sim n^2$.
5. $3n \not\sim n$.

Proposition 3 - Des propriétés de l'équivalence.

- Si $u_n \sum v_n$ alors $v_n \sum u_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n = o(u_n)$ alors $w_n = o(v_n)$.
- Si $u_n \sim$ alors (u_n) et (v_n) sont du même du signe à partir d'un certain rang.
- Si $u_n \sim v_n$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \sim \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ alors $u_n \sim v_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim r_n$ alors $u_n \times w_n \sim v_n \times r_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim r_n$ alors $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{r_n}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n \sim v_n$ alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.
- Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $u_n \sim w_n$ alors $v_n \sim u_n \sim w_n$.

Exemples.

1. $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}$ et $\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \sim \frac{1}{2^n\sqrt{n}}$ et $\frac{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1} \sim \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.
2. $n + \frac{1}{n} \sim n$ et $-n + \frac{1}{n^2} \sim -n$ mais il n'y a pas équivalence entre $n + \frac{1}{n} - n + \frac{1}{n^2}$ et $n - n$.
3. $n + 1 \sim n$ mais e^{n+1} n'est as équivalent à e^n.
4. $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ n'est pas équivalent à 1.

Remarques.

1. Il n'est pas possible d'ajouter membre à membre des équivalents.
2. Il n'est pas possible de composer des équivalents par une fonction.
3. Il n'est pas possible d'élever un équivalent une puissance variable.

III Lien entre négligeable et équivalent.

Théorème 1

$u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$, ou encore si et seulement si $u_n - v_n = o(u_n)$.

Remarques.

1. Ne pouvant sommer des équivalents nous passerons par le petit o pour gérer cette situation : si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = v_n + o(v_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n + v_n \sim v_n$.

IV Exercices.

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| < \sqrt{n} + \frac{1}{n}$.
Montrez que $u_n = o(n)$.

Exercice 2.

Justifiez que $n^2 + 1 = o(2^n)$.

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminez un équivalent de $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

Exercice 4.

Donnez un équivalent simple et la limite de $\frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$

Exercice 5.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite positive vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2(2n+1)}{\pi} \leqslant u_n^2 \leqslant \frac{(2n+1)^2}{n\pi}.$$

Déterminez un équivalent de u_n.

Exercice 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n^2 \ln\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$.
Déterminez la limite de (u_n).

Exercice 7.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$.
Déterminez la limite de (u_n).

Exercice 8.

Déterminez un équivalent de la suite de terme général $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 9.

Donnez un équivalent simple en $+\infty$ des suites dont on donne le terme général.

a) $u_n = \frac{(3n+12)(2n+5)}{(2n+2022)(3n^2+7n-14)}$.

b) $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

c) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.

d) $u_n = 3^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

e) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$.

f) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$.

g) $u_n = \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n}$.

h) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

i) $u_n = \ln(1+n) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

j) $u_n = \sin(n^2+1) - \sqrt{n}$.

k) $u_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} - \ln(n)$.

l) $u_n = n^2 + n - \ln(n^3+n)$.

m) $u_n = \mathrm{Arctan}(n^2 - n) + \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

n) $u_n \sin\left(\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$.

Correction de l'exercice 9

a) Équivalents polynômes et produits quotients : $u_n \sim \frac{1}{n}$.

b) $\frac{\pi}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et équivalent de référence : $u_n \sim \frac{\pi}{2n}$.

c) $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $u_n \sim \frac{1}{n}$.

d) $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et équivalent de référence : $u_n \sim 3^n \times \frac{1}{2^n} \sim \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

e) On peut se ramener à une situation produit quotient : $u_n = -\frac{1}{n(n-1)}$ donc $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$.

f) $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$.

g) $\mathrm{e}^{-2n} = o\left(\mathrm{e}^{-n}\right)$ donc $u_n \sim \mathrm{e}^{-n}$.

h) $\frac{1}{n} = o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

i) $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et équivalent de référence $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(\ln(n))$ donc $\ln(n+1) \sim \ln(n)$. Puis par produit $u_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

j) $\sin(n^2+1)$ est bornée et $-\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $u_n = -\sqrt{n} + o(-\sqrt{n})$. Autrement dit $u_n \sim -\sqrt{n}$.

k) $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \sim n$ donc $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = n + o(n)$. D'où $u_n = n + o(n) - \ln(n) = n + o(n)$. $u_n \sim n$.

l) $u_n = n^2 + n - 3\ln(n) - \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Donc $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'où $u_n = n^2 + n + o(n^2) \sim n^2$

Exercice 10.

1. Montrez que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$
2. Déduisez-en un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Exercice 11.

Trouvez un équivalent simple de la suite définie par $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Exercice 12.

Trouvez un équivalent simple de
$$u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}.$$

Exercice 13.