Étude de la convergence de suites.

I Exemples introductifs.

1 $0{,}999\cdots = 1$.

2 Achille et la tortue.

3 Plusieurs valeurs d'adhérence.

4 Divergence vers l'infini.

5 Divergence sans limite.

II Majorant, minorant.

Définition 1

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,

. M et m deux réels.

Nous dirons que

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* par M si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$;

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* par m si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n$;

(iii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques.

1. Un majorant n'est pas un maximum. Pas plus qu'un minorant n'est un minimum.

   Cependant un maximum est un majorant et un minimum un minorant.
2. Ainsi une suite est bornée s'il est possible de trouver des nombres m et M tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.
3. Trouver un minorant et un majorant pour une suite c'est limiter les possibilités de valeurs des termes de la suite. Dans de nombreux cas il faut se contenter de cela.

III Suites convergentes.

Définition 2

Soient :

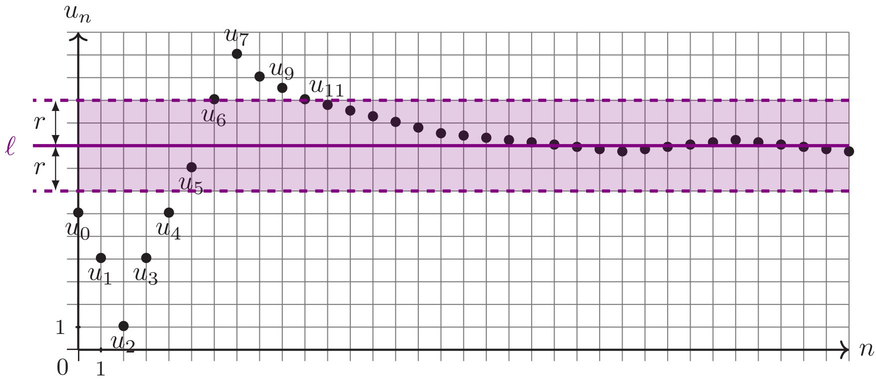
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite,

. $\ell \in \mathbb{R}$ un réel.

Nous dirons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers ℓ* si et seulement si : quelque soit l'intervalle ouvert contenant ℓ, il contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

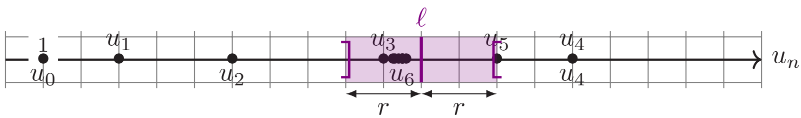
Remarques.

1. En cas de convergence nous dirons que ℓ est une *limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et nous noterons :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
ou
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$
2. Autrement dit si on délimite une petite zone autour de ℓ (en fait n'importe qu'elle zone) tous les points de la suite hormis un nombre fini d'entre eux sont dans cette zone.
3. La convergence est une propriété à l'infinie qui ne dépend pas des premiers termes. Donc si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ alors $(u_n)_{n\geqslant 7}$ converge aussi vers ℓ.
4. Les intervalles ouverts doivent être imaginés comme des ensembles de plus en plus petit autour de ℓ. Aussi petit soit l'intervalle ouvert contenant ℓ il contiendra tous les termes de la suite hormis quelques uns (un nombre fini en tout cas). Il y a un aspect dynamique dans cette définition : on peut se rapprocher autant qu'on le veut de ℓ, ça ne change rien.
5. Les intervalles doivent être ouverts car, sauf si la suite est stationnaire, la valeur limite n'est pas atteinte, et donc l'intervalle fermé $[\ell;\ell]$ qui contient ℓ ne contient, en général, aucun terme de la suite.
6. Le plus souvent dans les démonstrations nous travaillerons avec des intervalles ouverts centrés sur la limite ℓ et de rayon r : $]\ell-r,\ell+r[$. Mais ceci ne change rien à la généralité des résultats.
7. Interprétation graphique typique pour une suite définie par une formule explicite.



À partir de u_{11} les termes de la suite sont tous dans l'intervalle ouvert $]\ell - r,\ell + r[$.

8. Interprétation graphique typique pour une suite définie par une formule de récurrence.



9. Cette définition est un outil (assez théorique c'est vrai) pour démontrer qu'une suite est convergente. Nous en verrons d'autres dans cette leçon.
10. Remarquons que la limite éventuelle d'une suite devra être conjecturée.
11. C'est comme si la suite était infiniment bornée à l'infini.
12. Un point de vu souvent préféré est celui utilisant une distance. Dire que (u_n) converge vers ℓ c'est dire que la distance entre le terme général u_n et ℓ tend vers 0. Autrement dit la suite $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0.

Proposition 1 - Unicité de la limite.

Soient
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,
. ℓ_1 et ℓ_2 des nombres réels.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Remarques.

1. Nous pourrons donc maintenant parler de <u>la</u> limite d'une suite.

Proposition 2

Toute suite convergente est bornée.

Remarques.

1. Par contraposition : toute suite non bornée est divergente.

IV Suites divergentes.

1 Cas général.

Définition 3

Nous dirons qu'une suite *diverge* si et seulement si elle ne converge pas.

Remarques.

1. Cette définition recouvre une multitudes de cas possibles. Certains sont étudiés à part. Nous verrons ci-après la divergence avec limite infinie et la divergence avec plusieurs valeurs d'adhérence.

2 Divergence avec limite infinie.

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

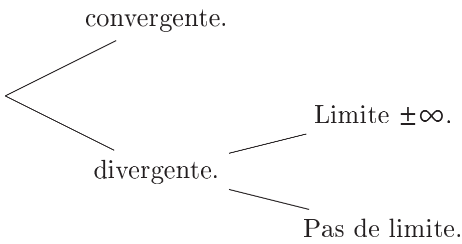
Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $+\infty$ si et seulement si, : quelque soit $A\in\mathbb{R}$, $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarques.

1. Nous avons également la définition en $-\infty$.

   Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $-\infty$ si et seulement si, : quelque soit $A\in\mathbb{R}$, $]-\infty,A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
2. Quelque soit le majorant A supposé de la suite, on se rend compte qu'il n'y a qu'un nombre fini de terme qui soient plus petits.

3. Une suite qui tend vers $\pm\infty$ est un cas particulier de suite divergente. Voici un schéma qui résume les possibilités lors de l'étude de la convergence d'une suite.



3 Divergence sans limite.

V Opérations sur les limites.

1 Somme.

Proposition 3

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

On s'intéresse à la convergence de la suite somme $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n \ u_n	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
m	$m+\ell$	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?
P.L.	P.L.	?	?	?

« P.L. » signifie « pas de limite ».
« ? » indique une forme indéterminée, c'est-à-dire une situation dans laquelle la détermination de la convergence nécessite d'autres informations.

Remarques.

1. Le tableau est symétrique par rapport à sa diagonale.
2. Ces résultats se démontrent avec les définitions des convergences et limites données.

3. Plutôt que d'apprendre par cœur, un peu de bon sens permet de deviner ces résultats.

2 Produit.

Proposition 4

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

On s'intéresse à la convergence de la suite produit $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n \ u_n	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
$m > 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
$m = 0$	0	0	0	?	?	P.L.
$m < 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$-\infty$	$+\infty$	P.L.
$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?
P.L.	P.L.	P.L.	P.L.	?	?	?

Remarques.

1. En combinant ces résultats aux précédents, nous remarquons que les suites convergentes sont stables par combinaisons linéaires : si (u_n) et (v_n) sont convergentes alors $(\alpha u_n + v_n)$ est convergente. Ce qui signifie que les suites convergentes peuvent être vues comme des vecteurs.
2. Cette stabilité par combinaisons linéaires résultat nous autorise à passer à la limite dans des égalités (simples). Si (u_n) converge vers ℓ et si, par exemple, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ alors, en passant à la limite $\ell = 2\ell + 3$. C'est une astuce à retenir.

3 Inverse.

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes sont tous non nuls.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, à partir d'un certain rang, $u_n > 0$ alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, à partir d'un certain rang, $u_n < 0$ alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

4 Quotient.

5 Exercices sur limites et opérations.

6 Limites et fractions rationnelles.

Proposition 6 - Limite et fraction rationnelle.

Soient :
. $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,
. $P(X) = a_p X^p + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients réels,
. $Q(X) = b_q X^q + \cdots + b_1 X + b_0$ des polynômes à coefficients réels.
. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\left(\frac{P(n)}{Q(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a_p}{b_q} n^{p-q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\right)$$

Remarques.

1. On pourrait s'inquiéter du fait que Q s'annule pour une valeur de $n \in \mathbb{N}$. Cependant Q n'admet qu'un nombre fini de racine et quitte à modifier le rang initial r on peut toujours supposer que $Q(n)$ ne s'annule pas pour $n \geqslant r$.
2. La limite dépend uniquement des monômes de plus haut degré de P et de Q.

VI Limite de la suite des images : $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 7 - Limite de la suite des images.

Soient :

. f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,

. $a \in \mathbb{R}$,

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}_f$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\left(f(x) \underset{x\to x}{\longrightarrow} a\right) \Rightarrow \left(f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)\right)$$

Remarques.

1. En particulier si f est continue en a alors la proposition s'applique.
2. Ce résultat se généralise à des suites dont tous les termes à partir d'un certain appartiennent à l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f puisque la convergence est une propriété asymptotique.

VII Limites et comparaison.

1 Limites finies.

Proposition 8 - Théorème d'encadrement.

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles,

. $\ell \in \mathbb{R}$.

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases}$$

alors

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Remarques.

1. C'est une propriété asymptotique : elle reste valable si l'encadrement n'est vérifié qu'à partir d'un certain rang.

Proposition 9 - Passage à la limite dans des inégalités.

Soient :

. $a,b \in \mathbb{R}$,

. $\ell \in \mathbb{R}$,

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers ℓ.

(i)
$$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant b) \Rightarrow (\ell \leqslant b)$$

(ii)
$$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a) \Rightarrow (\ell \geqslant a)$$

(iii)
$$(\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant u_n \leqslant b) \Rightarrow (a \leqslant \ell \leqslant b)$$

Remarques.

1. Ce résultat signifie que l'on peut passer à la limite dans une inégalité large.
2. Ce n'est pas vrai avec des inégalités strictes en général : $\frac{1}{n} > 0$ et pourtant $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Il s'agit d'une propriété asymptotique, autrement dit on pourrait se contenter d'un majorant ou d'un minorant à partir d'un certain rang.
4. En particulier on retrouve que toute suite convergente est bornée.

2 Limites infinies.

Proposition 10

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

(i)

$$\left.\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \left(v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right)$$

(ii) Si, à partir d'un certain rang,

$$u_n \leqslant v_n$$

et si

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

VIII Théorème de la limite monotone.

1 Propriété de la borne supérieure.

2 Limite finie.

Proposition 11 - Théorème de la limite monotone.

(i) Toute suite réelle croissante et majorée est convergente vers sa borne supérieure.

(ii) Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente vers sa borne inférieure.

Remarques.

1. Contrairement au théorème d'encadrement, celui-ci ne permet pas de connaître la limite mais uniquement son existence en tant que borne inférieure.
2. L'utilisation de ce résultat se prolonge en général par une recherche d'encadrement de la limite par divers procédés notamment algorithmiques.
3. En général la limite n'est pas le majorant ou le minorant.

3 Limite infinie.

Proposition 12 - Théorème de la limite monotone.

(i) Toute suite réelle croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.

(ii) Toute suite réelle décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

4 Suites adjacentes.

Proposition 13 - Suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

Si

(i) (u_n) est croissante,

(ii) (v_n) est décroissante et

(iii) $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

alors les suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* et dans ce cas elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

IX Suites géométriques.

Proposition 14

Soit $q \in \mathbb{R}$.

(i) Si $q = 1$ alors (q^n) est la suite constante égale à 1.

(ii) Si $1 < q$ alors (q^n) diverge en ayant pour limite $+\infty$.

(iii) Si $-1 < q < 1$ alors (q^n) converge vers 0.

(iv) Si $q < -1$ alors (q^n) diverge sans limite ni valeur d'adhérence.

(v) Si $q = -1$ alors (q^n) diverge avec deux valeurs d'adhérence.

X Croissances comparées de suites.

Théorème 1 Croissances comparées.

Soient :

. $a > 0$, $b > 0$ et $q > 0$ des réels.

(i)

$$\frac{(\ln(n))^b}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ii)

$$(q \in]1, +\infty[) \Rightarrow \left(\frac{n^a}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

(iii)

$$(q \in]0; 1[) \Rightarrow \left(n^a q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

(iv)

$$\frac{q^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(v)

$$\frac{n!}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

XI Exercices