Étude de la convergence de suites.

I Exemples introductifs.

1 $0{,}999\cdots = 1$.

2 Achille et la tortue.

3 Plusieurs valeurs d'adhérence.

4 Divergence vers l'infini.

5 Divergence sans limite.

II Majorant, minorant.

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{3n+2}{n+4}$.

1. Calculez les trois premiers termes de cette suite.
2. Étudiez le sens de variation de (u_n).
3. Montrez que (u_n) est majorée par 3.
4. Montrez que (u_n) est à termes positifs ; puis déduisez-en que (u_n) est bornée.

Exercice 2.

Déterminez si chacune des suites proposées est minorée, majorée ou bornée.

a) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$;

b) $u_n = \dfrac{n-1}{2n-3}$;

c) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

d) $u_n = (-1)^n \times \dfrac{n^2}{n+1}$;

e) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

f) $u_n = \pi^n - 3^n$;

g) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - 2n$;

h) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

i) $u_n = \sin\left(2^n \times \pi\right)$.

Exercice 3.

Démontrez que les suites suivantes sont bornées.

a) $u_n = 10 - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right)$;

b) $u_n = \frac{n}{n+2}$;

c) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$;

d) $u_n = 1 + \frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{7}\right)^n$;

e) $u_n = 25 + 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$;

f) $u_n = 9 + 3 + 1 + \cdots + 3^{-n+2}$.

III Suites convergentes.

Exercice 4.

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

IV Suites divergentes.

1 Cas général.

2 Divergence avec limite infinie.

Exercice 5.

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

b) $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}.$$

1. Calculez u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Conjecturez une expression explicite de u_n, pour n entier supérieur à 1.
3. Démontrez la propriété conjecturée.
4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

3 Divergence sans limite.

Exercice 7. ☢

Soit (u_n) une suite qui admet comme limite finie le réel ℓ.

1. Explicitez les suite numériques :

$$(u_{2n})_{n\geqslant 0} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\geqslant 0}.$$

2. Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ admettent aussi comme limite le réel ℓ.
3. (a) Énonce la propriété de la question précédente sous la forme « si ..., alors... ».
   (b) Déduisez-en la contraposée de cette dernière.
4. On pose $u_n = (-1)^n$, pour tout entier naturel n.
   (a) Justifiez que si la suite (u_n) admet une limite alors cette limite est finie.
   (b) Explicitez pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{2n} et u_{2n+1}.
   (c) Déduisez-en que la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ n'admet aucune limite, finie ou infinie.

Exercice 8. ☢

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.

1. Explicitez les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ en langage courant.
2. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite ℓ si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet comme limite ℓ.

V Opérations sur les limites.

1 Somme.

2 Produit.

3 Inverse.

4 Quotient.

5 Exercices sur limites et opérations.

Exercice 9. ⚽

Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^2 + n + \dfrac{1}{n}$.

b) $u_n = \sqrt{n}\left(n^2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{4}{\sqrt{n} + n}$.

d) $u_n = n^3 + n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

e) $u_n = 5n^2 + 3n\sqrt{n}$.

f) $u_n = \sqrt{n}(2 - n - 2n^2)$.

g) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n - 1}$.

h) $u_n = n^2\left(\dfrac{2}{n+1} - 1\right)$.

i) $u_n = \dfrac{3}{n}\left(\dfrac{3}{n^3} - 5\right)$.

j) $u_n = \dfrac{3}{1-2n} - \dfrac{2}{1-3n}$.

k) $u_n = 2 - \dfrac{3}{6 + \sqrt{n}}$.

l) $u_n = 2 - n\sqrt{5n} + \dfrac{1}{n^2 + 1}$.

m) $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

n) $u_n = n(n-4)(1 - \sqrt{n})$.

Exercice 10. ⚽

Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^3 - n + 5.$

b) $u_n = n^4 - n^2 + 1.$

c) $u_n = 3n\sqrt{n} - 2n^3.$

d) $u_n = \dfrac{n-3}{n+1}.$

e) $u_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n+3}.$

f) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{3n^2 - 2n + 5}.$

g) $u_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 + 8}.$

h) $u_n = n\sqrt{n^2+3} - n^2.$

i) $u_n = n^2 - 3n.$

j) $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 2.$

k) $u_n = 3n^4 - 3n^3 - 2n + 1.$

l) $u_n = \dfrac{4n-1}{3n+1}.$

m) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+2}.$

n) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1}.$

o) $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}.$

p) $u_n = \sqrt{5n+4} - \sqrt{5n+2}.$

q) $u_n = \sqrt{4n^2 + n + 3} - 2n.$

r) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}}.$

s) $u_n = n - \dfrac{n^2}{n+1}.$

t) $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1} - \dfrac{n+3}{3n-1}.$

u) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}.$

v) $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n+1}}.$

w) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}.$

x) $u_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}.$

6 Limites et fractions rationnelles.

VI Limite de la suite des images : $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

VII Limites et comparaison.

1 Limites finies.

Exercice 11. ⚽

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \frac{\sqrt{n+1}}{n + (-1)^n}.$$

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ on a :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$

2. Déterminez les limites des suites de termes généraux :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \text{ et } \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$

3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12. ⚽

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$;

c) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n+1}}$;

d) $u_n = \dfrac{n + 2(-1)^n}{n - (-1)^n}$;

e) $u_n = \dfrac{n^2 + \sin(n)}{n^2 + \cos(n)}$;

f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{1 + 2\sqrt{2n - (-1)^n}}$.

Exercice 13. ☢

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}.$$

Montrez que (u_n) converge et précisez sa limite.

2 Limites infinies.

Exercice 14. ⚽

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n + (-1)^n$;

b) $u_n = n^2 - \sin(n)$;

c) $u_n = \sin\left(\sqrt{2 - \cos^3(1 + n^2 - n^n)}\right) - n$.

Exercice 15.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

- (v_n) est bornée,
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démontrez que $(u_n + v_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 16.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.

VIII Théorème de la limite monotone.

1 Propriété de la borne supérieure.

2 Limite finie.

Exercice 17.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

1. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 4.
3. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. En passant à la limite dans la formule de récurrence, démontrez que la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que 4.
5. Concluez.

Exercice 18.

Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que (u_n) est majorée par 3.
3. Déduisez-en que (u_n) converge.

Exercice 19. ☕

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Prouvez que (u_n) est croissante et majorée puis concluez.
Pour établir la majoration on établira, pour tout entier $k > 1$:

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Exercice 20. ☢

Montrez que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ converge.

Exercice 21. ☢ Nombre d'Apéry

On pose pour tout entier supérieur ou égale à 1 :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Justifiez que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

3. Qu'en conclure ?

3 Limite infinie.

Exercice 22. ☯

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Prouvez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u_{2^{m+1}} - u_{2^m} \geqslant \frac{1}{2}$.
3. Déduisez-en que (u_n) n'est pas majorée. Concluez.

4 Suites adjacentes.

Exercice 23.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrez que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

   et déduisez-en la convergence de (u_n).
2. Montrez que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et concluez.

Exercice 24.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Exercice 25.

Soient $x \in [0,1]$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ et } v_n(x) = u_n(x) + \frac{x^n}{n \times n!}.$$

1. Vérifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$,

$$v_{n+1} - v_n = -x^n \frac{(n^2 + 2n)(1-x) + 1}{n(n+1) \times (n+1)!}.$$

2. Déduisez-en que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes. Que pouvez-vous en déduire ?
3. Montrez que la limite de $(u_n(1))$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 26.

Montrez que les suites (u_n) et (v_n) dont le terme général est donné ci-dessous sont adjacentes :

$$u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}.$$

Exercice 27.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \text{ et } v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n.$$

Montrez que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

IX Suites géométriques.

Exercice 28.

On considère la suite $u(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}.$$

1. On pose pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}.$$

   Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique dont donnera le premier terme et la raison.
2. Exprimez alors v_n puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminez la limite de la suite (v_n) et enfin celle de la suite (u_n).

Exercice 29.

On note $v_0 = -\frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - 1 \\ w_n = 2v_n + 6 \end{cases}$$

1. Démontrez que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Déduisez-en les expressions de v_n et w_n en fonction de n entier naturel. Déduisez-en la limite de la suite (v_n).
3. Calculez

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

   Déduisez-en la limite de la suite (S_n).

Exercice 30.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1.$$

1. (a) Démontrez que pour tout entier supérieur ou égale à 3, $u_n \geqslant 0$.
   (b) Montrez que, pour tout entier n supérieur ou égale à 4 :
   $$u_n \geqslant n - 2.$$
   (c) Déduisez-en la limite de la suite (u_n).
2. On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par :
   $$v_n = 4u_n - 8n + 24.$$
   (a) Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique strictement décroissante et dont on donnera le premier terme et la raison.
   (b) Démontrez que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = \frac{7}{2^n} + 2n - 6.$$
   (c) Vérifiez que, pour tout entier naturel n, $u_n = x_n + y_n$, où (x_n) est une géométrique et (y_n) une suite arithmétique, dont on précisera pour chacune, le premier terme ainsi que la raison.
   (d) Déduisez-en l'expression de
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$
   en fonction de n entier naturel.

Exercice 31.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Prouver que (u_n) est croissante et majorée. Concluez.
Pour la majoration vous démontrerez par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$.

Exercice 32.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Étudiez le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déduisez des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
4. (a) Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$.
   (b) Déduisez-en la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Retrouvez ce résultat en utilisant une suite des images par une fonction.

Exercice 33.

Soit (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{n^2}{2^n}.$$

1. Étudiez la convergence de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$.
2. Déduisez-en l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$.
3. Montrez que pour tout $n \geqslant 5$: $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$.
4. Déduisez-en la limite de (u_n).

X Croissances comparées de suites.

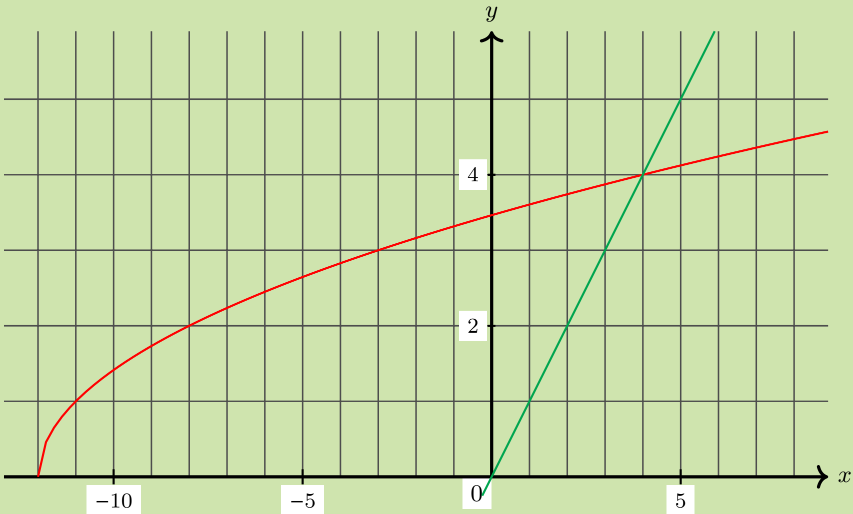
XI Exercices

Exercice 34. ⚽

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-12; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+12}$.



Construisez les premiers de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturez son comportement.

3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4).$$

   (b) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}.$$

4. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

Exercice 35. ⚽

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$v_{n1+} = 1{,}4v_n - 0{,}005v_n^2.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1{,}4x - 0{,}05x^2.$$

   (a) Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.

   (b) Représentez graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec le centimètre comme unité graphique, ainsi que les 10 premiers termes de la suite (v_n).

   (c) Conjecturez son comportement.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8.$$

3. Déduisez-en que la suite (u_n) admet une limite finie.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$f(x) - 8 = -0{,}05(x-20)(x-8).$$

   (a) Pour tout entier naturel n :

$$8 - v_{n+1} \leqslant 0{,}9 \times (8 - v_n).$$

   (b) Déduisez-en que, pour tout entier naturel n :

$$8 - v_n \leqslant 6 \times 0{,}9^n.$$

   (c) Concluez.

Exercice 36.

Un démographe étudie l'évolution de la population d'un pays.
Depuis 1969 (cette année-là, ce pays comptait 44 500 000 habitants), il constate qu'en moyenne la population a un taux de natalité de 35 pour mille et un taux de mortalité de 17 pour mille.
À ces variations, il faut ajouter 25 000 nouveaux arrivant dans ce pays et retirer 9 000 citoyens qui partent définitivement.
On note p_n la population de $1969 + n$, exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminez p_0.
2. Démontrez que pour tout entier naturel n :
$$p_{n+1} = 1{,}018 p_n + 16.$$
3. Déterminez le réel ℓ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$u_n = p_n - l$$
soit géométrique.
4. Déduisez-en les expressions de u_n et p_n en fonction de n entier naturel.
5. Combien d'habitants peut-on prévoir en 2012 ?

Exercice 37.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculez u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Écrivez un algorithme qui, pour une valeur $M \in \mathbb{R}$ donnée, renvoie un entier n pour lequel $u_n > M$.
   (b) Programmez cet algorithme à l'aide d'une calculatrice, puis exécutez-le pour des valeurs de M telles que 101, 100, 1 000.
   (c) Déduisez-en une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) à l'infini.
3. Démontrez que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 4$ alors :
$$u_n \geqslant 0.$$
Démontrez que, pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 5$ alors :
$$u_n \geqslant n - 3.$$
4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Exercice 38. ☕ Partie A.

On définit :

. la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5};$$

. la suite (S_n) pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}.$$

   Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

2. (a) Déterminez le sens de variation de la suite (S_n).
   (b) Calculez (S_n) en fonction de n.
   (c) Déterminez la imite de la suite (S_n).

Exercice 38. ☕ Partie B.

Étant donnée une suite (x_n), de nombres réels définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) défine par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Indiquez pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse ; justifiez dans chaque cas.
Proposition 1 : « si la suite (x_n) est convergente alors la suite (S_n) l'est aussi.
Proposition 2 : les suites (u_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice 39. ☯ épisode 1.

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

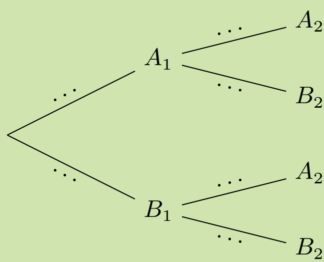
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

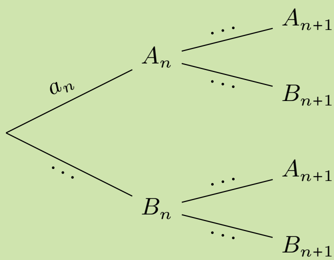
Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0{,}5$ et $b_1 = 0{,}5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



Exercice 39. ☯ épisode 2.

2. (a) Calculer a_2.
   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0{,}599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 40.

Exercice 41.

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \\ \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

1. Calculez u_2 et déduisez-en que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   (a) Calculez v_0.

   (b) Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n.

   (c) Déduisez-en que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   (d) Exprimez vhn en fonction de n entier naturel.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   (a) Calculez w_0.

   (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimez w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

   (c) Déduisez-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

   (d) Exprimez w_n en fonction de n entier naturel.

4. Montrez que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n.$$

   Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 42.

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout entier n supérieur ou égal 1 :

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Étudiez la convergence de (w_n). Vous pourrez en donner une expression explicite.

Exercice 43. Partie A.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right) \end{cases}.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

1. Peut-on affirmer que pour tout entier n, $u_n \in [-1;1]$.
2. Montrez que si u_0 est un entier pair, alors la suite (u_n) est constante à partir du rang 1.
3. Montrez que si u_0 est impair, alors la suite (u_n) est à valeurs dans $\{-1;1\}$ à partir du rang 1.

Exercice 43. Partie B.

Dans cette partie on suppose que u_0 n'est pas entier.

4. Établissez le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1;1]$.
5. (a) Déduisez-en que, pour tout entier supérieur ou égal à 1, $u_n \in [-1;1]$.
   (b) Déduisez-en que la suite (u_n) est bornée.
   (c) Peut-on affirmer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, (u_n) est monotone ?
6. (a) Montrez que si $x \in]-1;0[\cup]0;1[$, alors :
   $$f(x) \in]-1;0[\cup]0;1[.$$
   (b) Déduisez-en, pour tout entier naturel n, que si u_0 n'est pas entier, alors u_n n'est pas entier.
7. (a) Justifiez que l'image par f de l'intervalle $]0;1[$ est l'intervalle $]-1;0[$, puis que l'image par f de l'intervalle $]-1;0[$ est l'intervalle $]0;1[$.
   (b) Déduisez-en que, quel que soit le rang, la suite (u_n) ne peut être monotone.

Exercice 44. Partie A.

Exercice 45.

Exercice 46.

Exercice 47. ☢

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Montrez que la suite $(u_n(x))$ converge et calculez sa limite.

Exercice 48. ☢

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Discutez de la convergence de $(u_n(x))$ selon la valeur de x.

Exercice 49. ☢

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor.$$

Déterminez la limite de $(u_n(x))$.