Étude de la convergence de suites.

I Exemples introductifs.

1 $0{,}999\cdots = 1$.

2 Achille et la tortue.

3 Plusieurs valeurs d'adhérence.

4 Divergence vers l'infini.

5 Divergence sans limite.

II Majorant, minorant.

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{3n+2}{n+4}$.

1. Calculez les trois premiers termes de cette suite.
2. Étudiez le sens de variation de (u_n).
3. Montrez que (u_n) est majorée par 3.
4. Montrez que (u_n) est à termes positifs ; puis déduisez-en que (u_n) est bornée.

Exercice 2.

Déterminez si chacune des suites proposées est minorée, majorée ou bornée.

a) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$;

b) $u_n = \dfrac{n-1}{2n-3}$;

c) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

d) $u_n = (-1)^n \times \dfrac{n^2}{n+1}$;

e) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

f) $u_n = \pi^n - 3^n$;

g) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - 2n$;

h) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

i) $u_n = \sin\left(2^n \times \pi\right)$.

Correction de l'exercice 2

Dans tous les cas il faut calculer les premiers termes pour émettre une conjecture.

Avec une formule explicite il est parfois possible de deviner l'allure de la courbe représentative sans faire d'étude approfondie.

a) Clairement minorée par 0. (u_n) décroissante et $u_0 = 3$ donc majorée par 3.

b)

* En utilisant la forme canonique de l'homographie : $u_n = \frac{\frac{1}{2}(2n-3)}{2n-3} + \frac{\frac{3}{2}-1}{2n-3} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{n-\frac{3}{2}}$

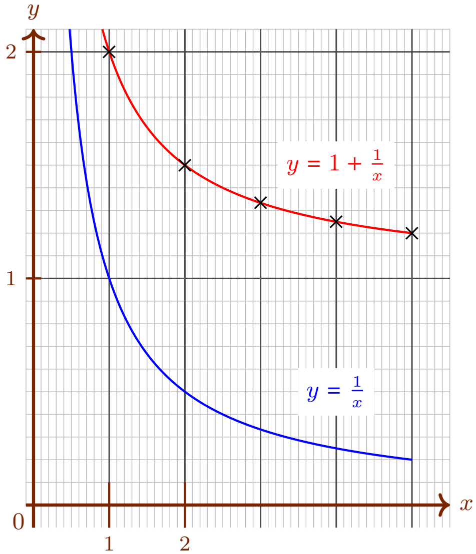
  Le tableau de variation de $f : x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-\frac{3}{2}}$ est :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

  Nous voyons qui faut tenir compte de ce qui se passe avant $\frac{3}{2}$ et après $\frac{3}{2}$.
  Donc u_n est inférieur ou égale au maximum de $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_2 = 1$. Ainsi (u_n) admet un majorant égale à 1 qui est aussi un maximum.

* Si $n \geqslant 2$, clairement $u_n \geqslant 0$. Comme de plus $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_1 = 0$ nous pouvons conclure (u_n) admet un minorant égale à 0 qui est atteint c'est donc in minimum.

c) Là encore utilisons la forme canonique de l'homographie : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.



(u_n) admet un maximum égale à 2 car décroissante et est minorée (apparemment par 1) mais clairement par 0.

d) Nous ne pouvons pas pour l'instant l'établir mais cette suite n'est pas bornée les termes de rangs pairs prennent des valeurs infiniment grandes et ceux de rangs impairs infiniment petites.

e)

* $\sqrt{n^2+1}-n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2}$ et puisque la fonction racine carrée est croissante : $\sqrt{n^2+1}-n \geqslant 0$. Autrement dit (u_n) est minorée par 0.
* En utilisant l'astuce de la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Clairement (u_n) est décroissante (puisque racine carré est croissante) donc (u_n) est décroissante.
(u_n) admet un maximum qui est $u_0 = 1$.

f)

* $u_n \geqslant 0$ car les fonctions puissances sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $\pi \geqslant 3$.
* (u_n) n'est pas majorée.

g) (u_n) est majorée par 1 qui est d'ailleurs unmmaximum. En effet :

$$\begin{aligned} n^2+n+1 &\leqslant n^2+2n+1 \\ \sqrt{n^2+n+1} &\leqslant \sqrt{(n+1)^2} \\ \sqrt{n^2+n+1}-2n &\leqslant n+1-2n \\ \sqrt{n^2+n+1}-2n &\leqslant -n+1 \end{aligned}$$

Nous en déduisons également que (u_n) ne sera pas minorée.

h) Bornée par -1 et 1 du fait du sinus.

i) Bornée par -1 et 1 du fait du sinus.

Exercice 3. ☢

Démontrez que les suites suivantes sont bornées.

a) $u_n = 10 - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right)$;

b) $u_n = \frac{n}{n+2}$;

c) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$;

d) $u_n = 1 + \frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{7}\right)^n$;

e) $u_n = 25 + 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$;

f) $u_n = 9 + 3 + 1 + \cdots + 3^{-n+2}$.

Correction de l'exercice 3

a) Puisque $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$10 - 2 \times 1 \leqslant 10 - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 10 - 2 \times 1.$$

Donc

$$8 \leqslant u_n \leqslant 12.$$

b) $0 \leqslant u_n$ et, comme $n < n+2$, $\frac{n}{n+2} < 1$ donc

$$0 \leqslant u_n < 1.$$

c)

d) Clairement $v_n \geqslant 0$.

En notant $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{7} v_n$, nous remarquons que $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Autrement dit c'est la somme des termes d'une suite géométrique.

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{7}} \\ &= \frac{7}{5}\left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

De $0 \leqslant \left(\frac{2}{7}\right)^n \leqslant \frac{2}{7}$, nous déduisons : $1 \geqslant 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \geqslant 0$.

e) Comme la précédente question.

f) Comme la précédente question.

III Suites convergentes.

Exercice 4.

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

IV Suites divergentes.

1 Cas général.

2 Divergence avec limite infinie.

Exercice 5.

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

b) $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}.$$

1. Calculez u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Conjecturez une expression explicite de u_n, pour n entier supérieur à 1.
3. Démontrez la propriété conjecturée.
4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

3 Divergence sans limite.

Exercice 7. ☢

Soit (u_n) une suite qui admet comme limite finie le réel ℓ.

1. Explicitez les suite numériques :
$$(u_{2n})_{n\geqslant 0} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\geqslant 0}.$$
2. Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ admettent aussi comme limite le réel ℓ.
3. (a) Énonce la propriété de la question précédente sous la forme « si ..., alors... ».
   (b) Déduisez-en la contraposée de cette dernière.
4. On pose $u_n = (-1)^n$, pour tout entier naturel n.
   (a) Justifiez que si la suite (u_n) admet une limite alors cette limite est finie.
   (b) Explicitez pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{2n} et u_{2n+1}.
   (c) Déduisez-en que la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ n'admet aucune limite, finie ou infinie.

Exercice 8. ☢

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.

1. Explicitez les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ en langage courant.
2. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite ℓ si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet comme limite ℓ.

V Opérations sur les limites.

1 Somme.

2 Produit.

3 Inverse.

4 Quotient.

5 Exercices sur limites et opérations.

Exercice 9. ⚽

Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^2 + n + \dfrac{1}{n}$.

b) $u_n = \sqrt{n}\left(n^2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{4}{\sqrt{n} + n}$.

d) $u_n = n^3 + n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

e) $u_n = 5n^2 + 3n\sqrt{n}$.

f) $u_n = \sqrt{n}(2 - n - 2n^2)$.

g) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n - 1}$.

h) $u_n = n^2\left(\dfrac{2}{n+1} - 1\right)$.

i) $u_n = \dfrac{3}{n}\left(\dfrac{3}{n^3} - 5\right)$.

j) $u_n = \dfrac{3}{1-2n} - \dfrac{2}{1-3n}$.

k) $u_n = 2 - \dfrac{3}{6 + \sqrt{n}}$.

l) $u_n = 2 - n\sqrt{5n} + \dfrac{1}{n^2+1}$.

m) $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

n) $u_n = n(n-4)(1-\sqrt{n})$.

Correction de l'exercice 9

a) $+\infty$.

b) $+\infty$.

c) 0.

d) $+\infty$.

e) $+\infty$.

f) $-\infty$.

g) 0.

h) $-\infty$.

i) 0.

j) 0.

k) 2.

l) $-\infty$.

m) $+\infty$.

n) $-\infty$.

Exercice 10. ⚽

Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^3 - n + 5$.

b) $u_n = n^4 - n^2 + 1$.

c) $u_n = 3n\sqrt{n} - 2n^3$.

d) $u_n = \dfrac{n-3}{n+1}$.

e) $u_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n+3}$.

f) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{3n^2 - 2n + 5}$.

g) $u_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 + 8}$.

h) $u_n = n\sqrt{n^2+3} - n^2$.

i) $u_n = n^2 - 3n$.

j) $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 2$.

k) $u_n = 3n^4 - 3n^3 - 2n + 1$.

l) $u_n = \dfrac{4n-1}{3n+1}$.

m) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+2}$.

n) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1}$.

o) $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$.

p) $u_n = \sqrt{5n+4} - \sqrt{5n+2}$.

q) $u_n = \sqrt{4n^2 + n + 3} - 2n$.

r) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}}$.

s) $u_n = n - \dfrac{n^2}{n+1}$.

t) $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1} - \dfrac{n+3}{3n-1}$.

u) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}$.

v) $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$.

w) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}$.

x) $u_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

Correction de l'exercice 10

a) $+\infty$.

b) $+\infty$.

c) $-\infty$.

d) 1.

e) $+\infty$.

f) $\frac{1}{3}$.

g) 0.

h) $+\infty$.

i) $+\infty$.

j) $+\infty$.

k) $+\infty$.

l) $\frac{4}{3}$.

m) 1.

n) $\frac{2}{3}$.

o) 0.

p) 0.

q) $\frac{1}{4}$.

r) $-\infty$.

s) 1.

t) $\frac{1}{6}$.

u) 1.

v) 1. Problème limite sous racine carré.

w) 0.

x) $-\frac{1}{2}$

6 Limites et fractions rationnelles.

VI Limite de la suite des images : $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

VII Limites et comparaison.

1 Limites finies.

Exercice 11. ⚽

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \frac{\sqrt{n+1}}{n+(-1)^n}.$$

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ on a :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$

2. Déterminez les limites des suites de termes généraux :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \text{ et } \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$

3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12. ⚽

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$;

c) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n+1}}$;

d) $u_n = \dfrac{n+2(-1)^n}{n-(-1)^n}$;

e) $u_n = \dfrac{n^2+\sin(n)}{n^2+\cos(n)}$;

f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{1+2\sqrt{2n-(-1)^n}}$.

Correction de l'exercice 12

a) $-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) $-\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

d) En factorisant par n et en utilisant le a) : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

e) En factorisant par n^2 : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

f) En factorisant par $\sqrt{n}$ et en utilisant le théorème des gendarmes pour la limite du dénominateur pour ne pas utiliser de passage à la limite dans la fonction.

Exercice 13. ☢

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

Montrez que (u_n) converge et précisez sa limite.

Correction de l'exercice 13

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}.$$

2 Limites infinies.

Exercice 14. ⚽

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n + (-1)^n$;

b) $u_n = n^2 - \sin(n)$;

c) $u_n = \sin\left(\sqrt{2-\cos^3(1+n^2-n^n)}\right) - n$.

Correction de l'exercice 14

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $n-1 \leqslant u_n$ or $n-1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $n^2-1 \leqslant u_n$ or $n^2-1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n \leqslant 1-n$ or $-n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.}$$

Exercice 15. ☕

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

- (v_n) est bornée,
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démontrez que $(u_n + v_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 16.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.

Correction de l'exercice 16

1. $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ donc strictement croissante.
2. (a) Par récurrence.
   Remarquons que dans ce cas nous aurions du mal à définir une fonction f telle que $u_{n+1} = u_n$.
   Clairement : $n^2 + 2n + 3 > n^2$.
   (b) $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_n > n^2$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. $u_n = (n+1)^2$.

VIII Théorème de la limite monotone.

1 Propriété de la borne supérieure.

2 Limite finie.

Exercice 17.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

1. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 4.
3. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. En passant à la limite dans la formule de récurrence, démontrez que la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que 4.
5. Concluez.

Correction de l'exercice 17

1. La fonction affine $f : x \mapsto \frac{1'2}{x} + 2$ est strictement croissante puisque son coefficient directeur est strictement positif.
   La démonstration se fait par récurrence. $u_0 > u_1 = 6$. Si $u_n \geqslant u_{n+1}$ alors $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}$.
2. Par récurrence. $u_0 \geqslant 4$. Si $u_n \geqslant 4$ alors $f(u_n) \geqslant f(4)$.
3. Décroissante et minorée donc convergente.
4. $\ell = \frac{1}{2}\ell + 2 \iff \ell = 4$.
5. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$.

Exercice 18. ⚽

Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que (u_n) est majorée par 3.
3. Déduisez-en que (u_n) converge.

Correction de l'exercice 18

1. Par récurrence $f : x \mapsto \sqrt{6 + x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. $f(3) = 3$. Par récurrence.
3. Décroissante et minorée donc convergente.

Exercice 19. ☕

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Prouvez que (u_n) est croissante et majorée puis concluez.
Pour établir la majoration on établira, pour tout entier $k > 1$:

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Correction de l'exercice 19

La croissance est triviale.
On remarque un télescopage sur les sommes majorant : $u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 20. ☢

Montrez que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ converge.

Correction de l'exercice 20

* La suite est croissante : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$.
* (v_n) est majorée par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \leqslant 1$.

Exercice 21. ☢ Nombre d'Apéry

On pose pour tout entier supérieur ou égale à 1 :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Justifiez que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

3. Qu'en conclure ?

Correction de l'exercice 21

1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3}$.
2.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{(n+1)^3} \\ &\leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \end{aligned}$$

Or on a successivement :

$$\begin{aligned} n(n+1) &\leqslant (n+1)^3 \\ -\frac{1}{n(n+1)} &\leqslant -\frac{1}{(n+1)^3} \\ -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} &\leqslant -\frac{1}{(n+1)^3} \end{aligned}$$

donc

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \leqslant -\frac{1}{n+1}$$

Finalement :

$$u_{n+1} \leqslant -\frac{1}{n+1}$$

3. La suite converge.

3 Limite infinie.

Exercice 22. ☯

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Prouvez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u_{2^{m+1}} - u_{2^m} \geqslant \frac{1}{2}$.
3. Déduisez-en que (u_n) n'est pas majorée. Concluez.

Correction de l'exercice 22

1. Somme de termes positifs.
2. $$\begin{aligned} u_{2^{m+1}} - u_{2^m} &= \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \\ &\geqslant \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} \\ &\geqslant \frac{2^{m+1} - 2^m}{2^{m+1}} \\ &\geqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$
3. $u_{2^m} = (u_{2^m} - u_{2^{m-1}}) + \cdots + (u_{2^2} - u_{2^1}) + (u_{2^1} - u_{2^0}) + u_{2^0} \geqslant \frac{m}{2}$.

4 Suites adjacentes.

Exercice 23. ☯

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrez que pour tout $k \geqslant 1$,
$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2}$$
et déduisez-en la convergence de (u_n).
2. Montrez que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et concluez.

Correction de l'exercice 23

1.
2. Démontrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

   * $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ donc (u_n) est strictement croissante.
   * $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ donc $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   * Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1}\frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\
&= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\
v_{n+1} - v_n &\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

   En tenant compte de l'encadrement démontré à la question précédente :

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &\leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\
&\leqslant 0
\end{aligned}
$$

   Donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes.}}$$

Nous en déduisons que

$$\boxed{(v_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente et a la même limite que la suite } (u_n)_{n\geqslant 1}\ .}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui est appelée la série de Riemann de paramètre 2 joue et jouera pour nous un rôle important. Nous ne l'avons pas encore démontré mais sa limite est $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 24. ☯

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Correction de l'exercice 24

Il s'agit d'une situation classique. Nous séparons la suite en deux suites extraites qui regroupées forment la suite toute entière. Il s'agit d'une astuce usuelle pour déterminer la limite d'une suite.

Démontrons que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
S_{2n+2} - S_{2n} &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+1}\\
&= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2}\\
&= -\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}\\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

Donc $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2+1}\\
&= -\frac{1}{2n+4} + \frac{1}{2n+3}\\
&= \frac{1}{(2n+4)(2n+3)}\\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

Donc $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est croissante.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+2}$$

Or $-\frac{1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $S_{2n+1} - S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Les deux suites obtenues en regardant les termes de rangs pairs et impairs sont donc convergentes et nous admettrons que nous pouvons en déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est la même que celle des suites extraites.

Exercice 25.

Soient $x \in [0,1]$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ et } v_n(x) = u_n(x) + \frac{x^n}{n \times n!}.$$

1. Vérifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$,

$$v_{n+1} - v_n = -x^n \frac{(n^2+2n)(1-x)+1}{n(n+1)\times(n+1)!}.$$

2. Déduisez-en que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes. Que pouvez-vous en déduire ?
3. Montrez que la limite de $(u_n(1))$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 26.

Montrez que les suites (u_n) et (v_n) dont le terme général est donné ci-dessous sont adjacentes :

$$u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}.$$

Exercice 27.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \text{ et } v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n.$$

Montrez que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

IX Suites géométriques.

Exercice 28.

On considère la suite $u(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. On pose pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}.$$

   Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique dont donnera le premier terme et la raison.
2. Exprimez alors v_n puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminez la limite de la suite (v_n) et enfin celle de la suite (u_n).

Correction de l'exercice 28

1. $u_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$ et $v_0 = -\frac{1}{3}$.
2. $v_n = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{5^n}$ et $u_n = \frac{1-\frac{1}{5^n}}{1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5^n}}$.
3. $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 29.

On note $v_0 = -\frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - 1 \\ w_n = 2v_n + 6 \end{cases}$$

1. Démontrez que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Déduisez-en les expressions de v_n et w_n en fonction de n entier naturel. Déduisez-en la limite de la suite (v_n).
3. Calculez

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

   Déduisez-en la limite de la suite (S_n).

Correction de l'exercice 29

1. $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.
2. $w_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$. $v_n = \frac{1}{2}\left(3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 6\right)$.
3. [2]

Exercice 30.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1.$$

1. (a) Démontrez que pour tout entier supérieur ou égale à 3, $u_n \geqslant 0$.
   (b) Montrez que, pour tout entier n supérieur ou égale à 4 :
   $$u_n \geqslant n - 2.$$
   (c) Déduisez-en la limite de la suite (u_n).
2. On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par :
   $$v_n = 4u_n - 8n + 24.$$
   (a) Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique strictement décroissante et dont on donnera le premier terme et la raison.
   (b) Démontrez que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = \frac{7}{2^n} + 2n - 6.$$
   (c) Vérifiez que, pour tout entier naturel n, $u_n = x_n + y_n$, où (x_n) est une géométrique et (y_n) une suite arithmétique, dont on précisera pour chacune, le premier terme ainsi que la raison.
   (d) Déduisez-en l'expression de
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$
   en fonction de n entier naturel.

Exercice 31.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Prouver que (u_n) est croissante et majorée. Concluez.
Pour la majoration vous démontrerez par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$.

Correction de l'exercice 31

Démontrons que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{k} \times \frac{1}{k-1} \times \cdots \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &\leqslant 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leqslant 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leqslant 3 \end{aligned}$$

$(u_n)_{n \geqslant 0}$ est majorée.

Montrons que (u_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$.

(u_n) est croissante.

Puisque (u_n) est croissante et majorée, d'après le théorème de limite monotone

(u_n) est convergente.

et sa limite est inférieure à 3.

Exercice 32.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Étudiez le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déduisez des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
4. (a) Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$.

   (b) Déduisez-en la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Retrouvez ce résultat en utilisant une suite des images par une fonction.

Exercice 33.

Soit (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{n^2}{2^n}.$$

1. Étudiez la convergence de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$.
2. Déduisez-en l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$.
3. Montrez que pour tout $n \geqslant 5$: $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$.
4. Déduisez-en la limite de (u_n).

Correction de l'exercice 33

1. Même si l'énoncé sous-entend qu'il n'y a pas de problème d'existence on peut vérifier rapidement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\\ &= \frac{(n+1)^2}{2n^2}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\end{aligned}$$

   $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$ admet une limite en 0 par valeurs supérieures et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}(1+0)^2$.

   $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \frac{1}{2}.}$

2. L'idée consiste ici à faire apparaître une comparaison locale au voisinage de la limite.
Puisque $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$ et que $\frac{1}{2} \in \left]0,\frac{3}{4}\right[$ nous pouvons affirmer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $\left]0,\frac{3}{4}\right[$.
Autrement dit :

$$\boxed{\forall n \geqslant N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}.}$$

3. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 5$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$ ».

* $u_5 = \frac{5^2}{2^5} = \frac{25}{32} \times \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{4}$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \geqslant 5$ un entier.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.

$$u_{n+1} = u_n \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

Puisque $n \geqslant 5$, par décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant u_n \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{5}\right)^2 \\ &\leqslant u_n \frac{3}{5} \\ &\leqslant u_n \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \frac{3}{4} \\ &\leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \geqslant 5,\ u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}.}$$

4. Pour tout entier $n \geqslant 5$ nous avons, d'après ce qui précède :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}.$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement et puisque $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Dans cet exercice nous avons comparé la croissance (la façon de tendre vers $+infty$ de deux suites : l'une puissance et l'autre exponentielle. Généralisation ce résultat dans la proposition suivante.

X Croissances comparées de suites.

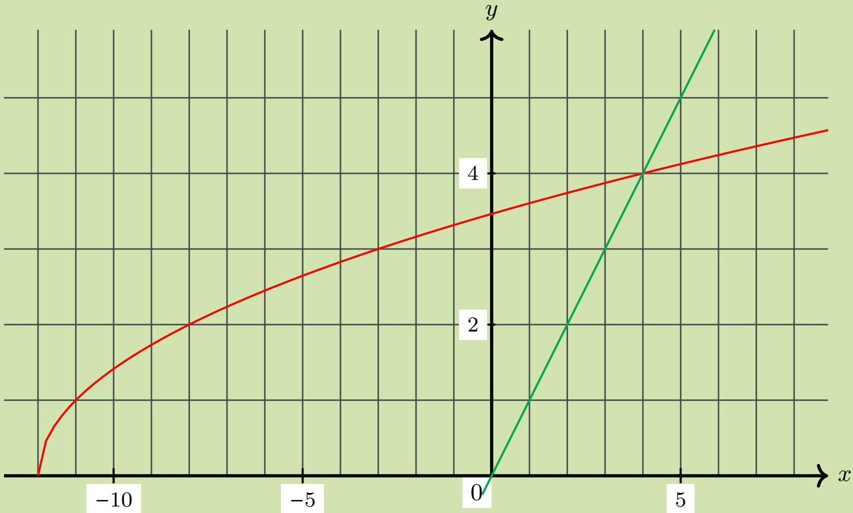
XI Exercices

Exercice 34. ⚽

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-12; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x + 12}$.



Construisez les premiers de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturez son comportement.

3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4).$$

   (b) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}.$$

4. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

Exercice 35. ⚽

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = 1{,}4v_n - 0{,}05v_n^2.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1{,}4x - 0{,}05x^2.$$

   (a) Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.

   (b) Représentez graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ avec le centimètre comme unité graphique, ainsi que les 10 premiers termes de la suite (v_n).

   (c) Conjecturez son comportement.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8.$$

3. Déduisez-en que la suite (u_n) admet une limite finie.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$f(x) - 8 = -0{,}05(x - 20)(x - 8).$$

   (a) Pour tout entier naturel n :

$$8 - v_{n+1} \leqslant 0{,}9 \times (8 - v_n).$$

   (b) Déduisez-en que, pour tout entier naturel n :

$$8 - v_n \leqslant 6 \times 0{,}9^n.$$

   (c) Concluez.

Exercice 36.

Un démographe étudie l'évolution de la population d'un pays.
Depuis 1969 (cette année-là, ce pays comptait 44 500 000 habitants), il constate qu'en moyenne la population a un taux de natalité de 35 pour mille et un taux de mortalité de 17 pour mille.
À ces variations, il faut ajouter 25 000 nouveaux arrivant dans ce pays et retirer 9 000 citoyens qui partent définitivement.
On note p_n la population de $1969 + n$, exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminez p_0.
2. Démontrez que pour tout entier naturel n :
$$p_{n+1} = 1{,}018 p_n + 16.$$
3. Déterminez le réel ℓ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$u_n = p_n - l$$
soit géométrique.
4. Déduisez-en les expressions de u_n et p_n en fonction de n entier naturel.
5. Combien d'habitants peut-on prévoir en 2012 ?

Exercice 37.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculez u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Écrivez un algorithme qui, pour une valeur $M \in \mathbb{R}$ donnée, renvoie un entier n pour lequel $u_n > M$.
   (b) Programmez cet algorithme à l'aide d'une calculatrice, puis exécutez-le pour des valeurs de M telles que 101, 100, 1 000.
   (c) Déduisez-en une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) à l'infini.
3. Démontrez que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 4$ alors :
$$u_n \geqslant 0.$$
Démontrez que, pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 5$ alors :
$$u_n \geqslant n - 3.$$
4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Exercice 38. ☕ Partie A.

On définit :

. la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5};$$

. la suite (S_n) pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}.$$

   Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

2. (a) Déterminez le sens de variation de la suite (S_n).
   (b) Calculez (S_n) en fonction de n.
   (c) Déterminez la limite de la suite (S_n).

Exercice 38. ☕ Partie B.

Étant donnée une suite (x_n), de nombres réels définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) défine par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Indiquez pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse ; justifiez dans chaque cas.
Proposition 1 : « si la suite (x_n) est convergente alors la suite (S_n) l'est aussi.
Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Correction de l'exercice 38

Partie A.

1.

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{5}\left(1+\frac{12}{5^n}\right)+\frac{4}{5} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{5}+\frac{12}{5^{n+1}}+\frac{4}{5} \\ &= 1+\frac{12}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$$

2. (a) (S_n) est strictement croissante car $S_{n+1}-S_n = 1+\frac{12}{5^{n+1}} > 0$

   (b) $S_n = n+1+12\times\frac{1-\frac{1}{5^{n+1}}}{1-\frac{1}{5}}$.

   (c) $$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Partie B.
Les deux propositions sont fausses comme le montre la parti A.

Exercice 39. ☯ épisode 1.

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

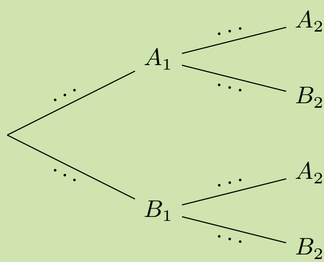
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0{,}5$ et $b_1 = 0{,}5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :

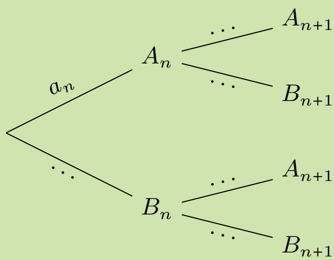


Exercice 39. épisode 2.

2. (a) Calculer a_2.

   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0{,}599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 40.

Exercice 41.

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

1. Calculez u_2 et déduisez-en que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   (a) Calculez v_0.

   (b) Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n.

   (c) Déduisez-en que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   (d) Exprimez vhn en fonction de n entier naturel.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   (a) Calculez w_0.

   (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimez w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

   (c) Déduisez-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

   (d) Exprimez w_n en fonction de n entier naturel.

4. Montrez que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n.$$

   Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 42.

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout entier n supérieur ou égal 1 :

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Étudiez la convergence de (w_n). Vous pourrez en donner une expression explicite.

Exercice 43. Partie A.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right) \end{cases}.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

1. Peut-on affirmer que pour tout entier n, $u_n \in [-1;1]$.
2. Montrez que si u_0 est un entier pair, alors la suite (u_n) est constante à partir du rang 1.
3. Montrez que si u_0 est impair, alors la suite (u_n) est à valeurs dans $\{-1;1\}$ à partir du rang 1.

Exercice 43. Partie B.

Dans cette partie on suppose que u_0 n'est pas entier.

4. Établissez le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1;1]$.
5. (a) Déduisez-en que, pour tout entier supérieur ou égal à 1, $u_n \in [-1;1]$.
   (b) Déduisez-en que la suite (u_n) est bornée.
   (c) Peut-on affirmer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, (u_n) est monotone ?
6. (a) Montrez que si $x \in]-1;0[\cup]0;1[$, alors :
   $$f(x) \in]-1;0[\cup]0;1[.$$
   (b) Déduisez-en, pour tout entier naturel n, que si u_0 n'est pas entier, alors u_n n'est pas entier.
7. (a) Justifiez que l'image par f de l'intervalle $]0;1[$ est l'intervalle $]-1;0[$, puis que l'image par f de l'intervalle $]-1;0[$ est l'intervalle $]0;1[$.
   (b) Déduisez-en que, quel que soit le rang, la suite (u_n) ne peut être monotone.

Exercice 44. Partie A.

Exercice 45.

Exercice 46.

Exercice 47. ☢

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Montrez que la suite $(u_n(x))$ converge et calculez sa limite.

Exercice 48. ☢

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Discutez de la convergence de $(u_n(x))$ selon la valeur de x.

Exercice 49. ☢

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor.$$

Déterminez la limite de $(u_n(x))$.