Étude de la convergence de suites.

I Exemples introductifs.

1 $0,999\cdots = 1$.

2 Achille et la tortue.

Le fichier Géogébra à télécharger : lien.
Le logiciel en ligne pour l'ouvrir : Géogébra.

3 Plusieurs valeurs d'adhérence.

Le fichier Géogébra à télécharger : lien.
Le logiciel en ligne pour l'ouvrir : Géogébra.

4 Divergence vers l'infini.

Le fichier Géogébra à télécharger : lien.
Le logiciel en ligne pour l'ouvrir : Géogébra.

5 Divergence sans limite.

Le fichier Géogébra à télécharger : lien.
Le logiciel en ligne pour l'ouvrir : Géogébra.

II Majorant, minorant.

Dans les exemples nous avons indiqué que les valeurs possibles pour la suite sont limités. Introduisons ici le vocabulaire correspondant.

Définition 1

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,

. M et m deux réels.

Nous dirons que

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* par M si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$;

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* par m si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n$;

(iii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques.

1. Un majorant n'est pas un maximum. Pas plus qu'un minorant n'est un minimum.

   Cependant un maximum est un majorant et un minimum un minorant.
2. Ainsi une suite est bornée s'il est possible de trouver des nombres m et M tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.
3. Trouver un minorant et un majorant pour une suite c'est limiter les possibilités de valeurs des termes de la suite. Dans de nombreux cas il faut se contenter de cela.

Exemples.

1. Par une étude de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient aisément : $0 < \frac{1}{x} \leqslant 1$.

   Donc $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0, -1, $-234,5$ et majorée par 1, 3, $20\,000$. Donc elle est bornée.

   Remarquons également que cette suite a un maximum mais pas de minimum et qu'elle admet une borne inférieure.
2. $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées puisque nous savons que les fonctions sinus et cosinus sont, par construction, bornées par -1 et 1.
3. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ est bornée : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Soit $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ ».

   Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   * $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   * Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.

     Par hypothèse de récurrence :
     $$0 \leqslant u_n \leqslant 2.$$
     Donc :
     $$0+1 \leqslant 1+u_n \leqslant 2+1.$$
     La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ nous en déduisons :
     $$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{1+u_n} \leqslant \sqrt{3}.$$
     Par conséquent (puisque $\sqrt{3} \leqslant \sqrt{4} = 2$) :
     $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$
     Autrement dit $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Exercice 1. ☯

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{3n+2}{n+4}$.

1. Calculez les trois premiers termes de cette suite.
2. Étudiez le sens de variation de (u_n).
3. Montrez que (u_n) est majorée par 3.
4. Montrez que (u_n) est à termes positifs ; puis déduisez-en que (u_n) est bornée.

Exercice 2. ☢

Déterminez si chacune des suites proposées est minorée, majorée ou bornée.

a) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$;

b) $u_n = \dfrac{n-1}{2n-3}$;

c) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

d) $u_n = (-1)^n \times \dfrac{n^2}{n+1}$;

e) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

f) $u_n = \pi^n - 3^n$;

g) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - 2n$;

h) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

i) $u_n = \sin\left(2^n \times \pi\right)$.

Correction de l'exercice 2

Dans tous les cas il faut calculer les premiers termes pour émettre une conjecture.

Avec une formule explicite il est parfois possible de deviner l'allure de la courbe représentative sans faire d'étude approfondie.

a) Clairement minorée par 0. (u_n) décroissante et $u_0 = 3$ donc majorée par 3.

b)

* En utilisant la forme canonique de l'homographie : $u_n = \frac{\frac{1}{2}(2n-3)}{2n-3} + \frac{\frac{3}{2}-1}{2n-3} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{n-\frac{3}{2}}$

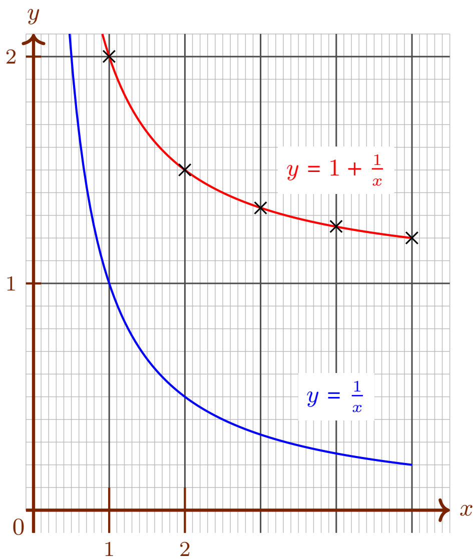
  Le tableau de variation de $f : x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-\frac{3}{2}}$ est :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

  Nous voyons qui faut tenir compte de ce qui se passe avant $\frac{3}{2}$ et après $\frac{3}{2}$. Donc u_n est inférieur ou égale au maximum de $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_2 = 1$. Ainsi (u_n) admet un majorant égale à 1 qui est aussi un maximum.

* Si $n \geqslant 2$, clairement $u_n \geqslant 0$. Comme de plus $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_1 = 0$ nous pouvons conclure (u_n) admet un minorant égale à 0 qui est atteint c'est donc in minimum.

c) Là encore utilisons la forme canonique de l'homographie : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.



(u_n) admet un maximum égale à 2 car décroissante et est minorée (apparemment par 1) mais clairement par 0.

d) Nous ne pouvons pas pour l'instant l'établir mais cette suite n'est pas bornée les termes de rangs pairs prennent des valeurs infiniment grandes et ceux de rangs impairs infiniment petites.

e)

* $\sqrt{n^2+1}-n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2}$ et puisque la fonction racine carrée est croissante : $\sqrt{n^2+1}-n \geqslant 0$. Autrement dit (u_n) est minorée par 0.
* En utilisant l'astuce de la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Clairement (u_n) est décroissante (puisque racine carré est croissante) donc (u_n) est décroissante.

(u_n) admet un maximum qui est $u_0 = 1$.

f)

* $u_n \geqslant 0$ car les fonctions puissances sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $\pi \geqslant 3$.
* (u_n) n'est pas majorée.

g) (u_n) est majorée par 1 qui est d'ailleurs unmmaximum. En effet :

$$\begin{aligned} n^2+n+1 &\leqslant n^2+2n+1 \\ \sqrt{n^2+n+1} &\leqslant \sqrt{(n+1)^2} \\ \sqrt{n^2+n+1}-2n &\leqslant n+1-2n \\ \sqrt{n^2+n+1}-2n &\leqslant -n+1 \end{aligned}$$

Nous en déduisons également que (u_n) ne sera pas minorée.

h) Bornée par -1 et 1 du fait du sinus.

i) Bornée par -1 et 1 du fait du sinus.

Exercice 3. ☢

Démontrez que les suites suivantes sont bornées.

a) $u_n = 10 - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right)$;

b) $u_n = \frac{n}{n+2}$;

c) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$;

d) $u_n = 1 + \frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{7}\right)^n$;

e) $u_n = 25 + 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$;

f) $u_n = 9 + 3 + 1 + \cdots + 3^{-n+2}$.

Correction de l'exercice 3

a) Puisque $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$10 - 2 \times 1 \leqslant 10 - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 10 - 2 \times 1.$$

Donc

$$8 \leqslant u_n \leqslant 12.$$

b) $0 \leqslant u_n$ et, comme $n < n+2$, $\frac{n}{n+2} < 1$ donc

$$0 \leqslant u_n < 1.$$

c)

d) Clairement $v_n \geqslant 0$.

En notant $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{7}v_n$, nous remarquons que $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Autrement dit c'est la somme des termes d'une suite géométrique.
Donc

$$\begin{aligned} u_n &= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{7}} \\ &= \frac{7}{5}\left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

De $0 \leqslant \left(\frac{2}{7}\right)^n \leqslant \frac{2}{7}$, nous déduisons : $1 \geqslant 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \geqslant 0$.

e) Comme la précédente question.

f) Comme la précédente question.

III Suites convergentes.

Définition 2

Soient :

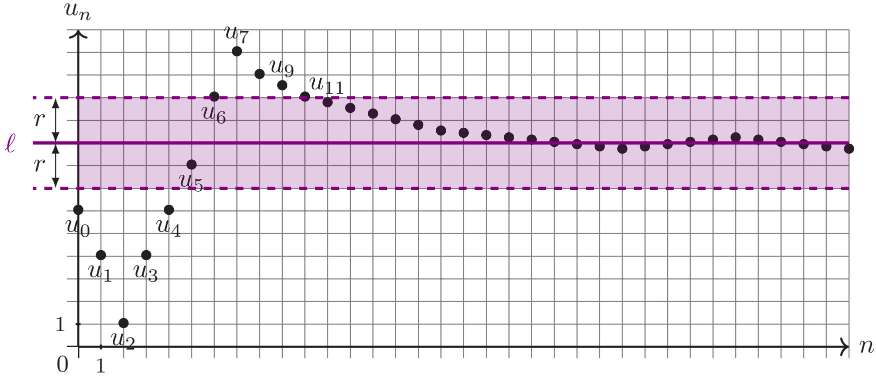
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite,

. $\ell \in \mathbb{R}$ un réel.

Nous dirons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers ℓ* si et seulement si : quelque soit l'intervalle ouvert contenant ℓ, il contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

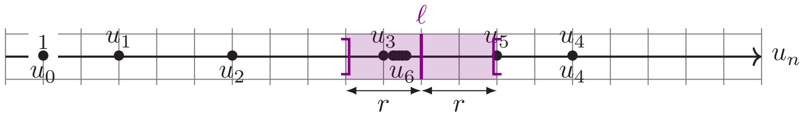
Remarques.

1. En cas de convergence nous dirons que ℓ est une *limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et nous noterons :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
ou
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$
2. Autrement dit si on délimite une petite zone autour de ℓ (en fait n'importe qu'elle zone) tous les points de la suite hormis un nombre fini d'entre eux sont dans cette zone.
3. La convergence est une propriété à l'infinie qui ne dépend pas des premiers termes. Donc si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ alors $(u_n)_{n\geqslant 7}$ converge aussi vers ℓ.
4. Les intervalles ouverts doivent être imaginés comme des ensembles de plus en plus petit autour de ℓ. Aussi petit soit l'intervalle ouvert contenant ℓ il contiendra tous les termes de la suite hormis quelques uns (un nombre fini en tout cas). Il y a un aspect dynamique dans cette définition : on peut se rapprocher autant qu'on le veut de ℓ, ça ne change rien.
5. Les intervalles doivent être ouverts car, sauf si la suite est stationnaire, la valeur limite n'est pas atteinte, et donc l'intervalle fermé $[\ell;\ell]$ qui contient ℓ ne contient, en général, aucun terme de la suite.
6. Le plus souvent dans les démonstrations nous travaillerons avec des intervalles ouverts centrés sur la limite ℓ et de rayon r : $]\ell-r,\ell+r[$. Mais ceci ne change rien à la généralité des résultats.
7. Interprétation graphique typique pour une suite définie par une formule explicite.



À partir de u_{11} les termes de la suite sont tous dans l'intervalle ouvert $]\ell - r, \ell + r[$.

8. Interprétation graphique typique pour une suite définie par une formule de récurrence.



9. Cette définition est un outil (assez théorique c'est vrai) pour démontrer qu'une suite est convergente. Nous en verrons d'autres dans cette leçon.
10. Remarquons que la limite éventuelle d'une suite devra être conjecturée.
11. C'est comme si la suite était infiniment bornée à l'infini.
12. Un point de vu souvent préféré est celui utilisant une distance. Dire que (u_n) converge vers ℓ c'est dire que la distance entre le terme général u_n et ℓ tend vers 0. Autrement dit la suite $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0.

Exemples.

1. Toute suite stationnaire (constante à partir d'un certain rang) est convergente.
2. Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   Nous avons déjà conjecturé en classe de première que cette suite converge vers 0.
   Démontrons-le.

   Démontrons que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

   Soient a et b des réels tels que $a < 0 < b$. Ainsi $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert contenant 0.

* Analyse.
  Concrètement cette phase est une phase de recherche. On cherche la valeur du rang à partir duquel les termes de la suite sont dans l'intervalle I en faisant comme si on l'avait déjà trouvé.

  Supposons que nous ayons trouvé un nombre entier N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geqslant N$, alors $u_n \in I$. Autrement dit :
  $$a < u_n < b.$$
  Donc :
  $$\frac{1}{n} < b,$$
  i.e., la fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$:
  $$n > \frac{1}{b}.$$

* Synthèse.
  Soit $N = \left\lfloor \frac{1}{b} + 1 \right\rfloor$.
  Si nous prenons n plus grand que le rang N alors :
  $$\begin{aligned} n &\geqslant N \\ n &\geqslant \left\lfloor \frac{1}{b} + 1 \right\rfloor \\ n &> \frac{1}{b} \end{aligned}$$
  Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
  $$\frac{1}{n} < b$$
  Comme de plus $a < 0 < \frac{1}{n}$ nous avons bien : $a < \frac{1}{n} < b$.
  Autrement dit : $\frac{1}{n} \in]a, b[$.
  À partir du rang N tous les termes de la suite sont dans $]a, b[$.

Quel que soit l'intervalle I contenant 0 il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I.
Autrement dit, par définition :

$$\boxed{\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0.}$$

On notera $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ou $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. ♥ Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
4. ♥ La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
5. ♥ Soit $\alpha > 0$. $(\ln(n))^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 4.

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Proposition 1 - Unicité de la limite.

Soient
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,
. ℓ_1 et ℓ_2 des nombres réels.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration

Nous allons utiliser un procédé très classique pour démontrer l'unicité d'un objet mathématique : nous allons supposer qu'il en existe deux, *a priori* distincts, et démontrer qu'ils sont nécessairement égaux.

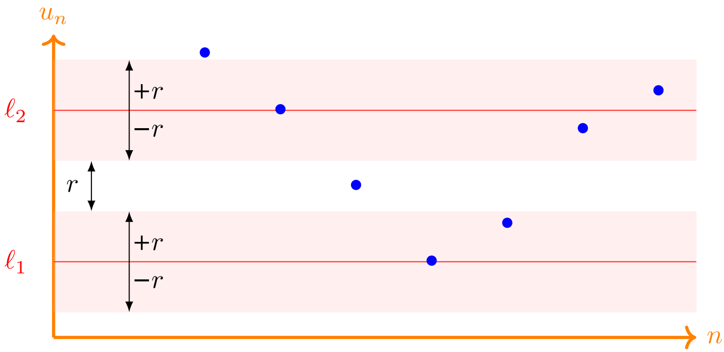
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2.

Démontrons que $\ell_1 = \ell_2$ en raisonnant par l'absurde.

Supposons donc que $\ell_1 < \ell_2$ et démontrons que cela conduit à une contradiction. Soit $r = \frac{1}{3}(\ell_2 - \ell_1)$.

L'idée est que nous devrions avoir tous les points de la suite (hormis un nombre fini d'entre eux) dans deux intervalles disjoints ce qui est impossible.

Ci-dessous une représentation graphique des deux intervalles que nous allons considérer : $]\ell_1 - r, \ell_1 + r[$ et $]\ell_2 - r, \ell_2 + r[$.



Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1, à partir d'un certain rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $]\ell_1 - r, \ell_1 + r[$. Ainsi pour tout $n \in \ltimes$, si $n \geqslant N_1$ alors

$$\ell_1 - r < u_n < \ell_1 + r.$$

Autrement dit tous les termes de la suite, hormis les premiers, sont dans la zone colorée en rose autour de ℓ_1.

De la même façon il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ un rang à partir duquel pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $n \geqslant N_2$ alors :

$$\ell_2 - r < u_n < \ell_2 + r.$$

Autrement dit tous les termes de la suite, hormis les premiers, sont dans la zone colorée en rose autour de ℓ_2.

Mais donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, alors :

$$u_n < \ell_1 + r < \ell_2 - r < u_n.$$

Autrement dit :

$$u_n < u_n,$$

ce qui est impossible.

Nous avons donc démontré par l'absurde que, nécessairement $l_1 = l_2$.

Autrement dit

la limite d'une suite convergente est unique.

■

Remarques.

1. Nous pourrons donc maintenant parler de la limite d'une suite.

Proposition 2

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel ℓ.

Soient a et b des réels tels que $a < \ell < b$.

$]a, b[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ donc, par définition de la convergence, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $]a, b[$. Donc les termes u_n pour $n \geqslant N$ sont bornés par a et b.

Si maintenant $0 \leqslant n < N$ alors les u_n sont mieux que bornés : ils ont un maximum M et un minimum m, car il y en a un nombre fini.

Le majorant global est donc être $\max(M, b)$ et le minorant $\min(m, a)$.

■

Remarques.

1. Par contraposition : toute suite non bornée est divergente.

IV Suites divergentes.

1 Cas général.

Définition 3

Nous dirons qu'une suite *diverge* si et seulement si elle ne converge pas.

Remarques.

1. Cette définition recouvre une multitudes de cas possibles. Certains sont étudiés à part. Nous verrons ci-après la divergence avec limite infinie et la divergence avec plusieurs valeurs d'adhérence.

2 Divergence avec limite infinie.

Définition 4

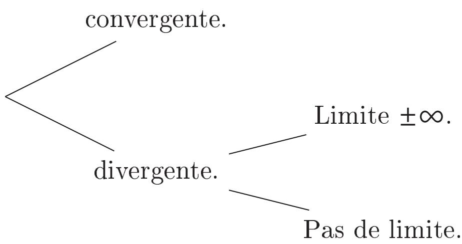
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $+\infty$ si et seulement si, : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarques.

1. Nous avons également la définition en $-\infty$.

   Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $-\infty$ si et seulement si, : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
2. Quelque soit le majorant A supposé de la suite, on se rend compte qu'il n'y a qu'un nombre fini de terme qui soient plus petits.
3. Une suite qui tend vers $\pm\infty$ est un cas particulier de suite divergente. Voici un schéma qui résume les possibilités lors de l'étude de la convergence d'une suite.



Exemples.

1. Démontrons que la suite définie par $u_n = n$ tend vers $+\infty$.

   Soit $A \in \mathbb{R}$.

   Notons $N = \lfloor A \rfloor + 1$.

   Si $n \geqslant N$ alors

$$\begin{aligned} n &\geqslant \lfloor A \rfloor + 1 \\ &> A \end{aligned}$$

   Autrement dit $n \in]A; +\infty[$.

   À partir du rang N tous les termes de la suite sont dans $]A, +\infty[$.

   Quelque soit le réel A l'intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

   Autrement dit :

   $$\boxed{(n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty.}$$
2. La suite arithmétique définie par $u_n = 2n - 3$ diverge vers $+\infty$.

3. La suite arithmétique définie par $u_n = -3n - 5$ diverge vers $-\infty$.
4. ♥ Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. La suite $\left(n^\alpha\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$ vers 0.
5. ♥ La suite $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
6. ♥ La suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 5. ☕

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

b) $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6. ⚽

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}.$$

1. Calculez u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Conjecturez une expression explicite de u_n, pour n entier supérieur à 1.
3. Démontrez la propriété conjecturée.
4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

3 Divergence sans limite.

Il existe de très nombreuses situations de suites qui divergent sans limite.

Exemples.

1. La suite de terme général $(-1)^n$ définie sur $\mathbb{N}$ diverge sans limite. Si on ne regarde que les terme de rang pair, la suite obtenue est constante égale à 1. Pour les rangs impairs elle est constante égale à -1. La suite pourrait avoir plusieurs limites ce qui contredit l'unicité de la limite.
2. $u_n = (-2)^n$. La suite des termes de rang pair admet $+\infty$ pour limite

Exercice 7. ☢

Soit (u_n) une suite qui admet comme limite finie le réel ℓ.

1. Explicitez les suite numériques :

$$(u_{2n})_{n\geqslant 0} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\geqslant 0}.$$

2. Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ admettent aussi comme limite le réel ℓ.
3. (a) Énonce la propriété de la question précédente sous la forme « si ..., alors... ».
   (b) Déduisez-en la contraposée de cette dernière.
4. On pose $u_n = (-1)^n$, pour tout entier naturel n.
   (a) Justifiez que si la suite (u_n) admet une limite alors cette limite est finie.
   (b) Explicitez pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{2n} et u_{2n+1}.
   (c) Déduisez-en que la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ n'admet aucune limite, finie ou infinie.

Exercice 8. ☢

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.

1. Explicitez les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ en langage courant.
2. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite ℓ si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet comme limite ℓ.

V Opérations sur les limites.

La définition de la convergence permet d'établir la convergence de quelques suites de référence. Pour le reste nous ferons, ce que nous avions déjà fait pour les fonctions dérivées, à savoir obtenir de nouveaux résultat en combinant ceux déjà connus.

1 Somme.

Proposition 3

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

On s'intéresse à la convergence de la suite somme $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n \ u_n	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
m	$m+\ell$	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?
P.L.	P.L.	?	?	?

« P.L. » signifie « pas de limite ».
« ? » indique une forme indéterminée, c'est-à-dire une situation dans laquelle la détermination de la convergence nécessite d'autres informations.

Remarques.

1. Le tableau est symétrique par rapport à sa diagonale.
2. Ces résultats se démontrent avec les définitions des convergences et limites données.
3. Plutôt que d'apprendre par cœur, un peu de bon sens permet de deviner ces résultats.

Exemples.

1. 3 est une suite constante (donc qui converge vers 3) et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0 donc $\left(3+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.
2. $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 et $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$ donc $\left(\frac{1}{n}+\sqrt{n}\right)$ tend vers $+\infty$.
3. $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^2+\sqrt{n} = +\infty$.

2 Produit.

Proposition 4

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

On s'intéresse à la convergence de la suite produit $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n \ u_n	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
$m > 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$+\infty$	$-\infty$	P.L.
$m = 0$	0	0	0	?	?	P.L.
$m < 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$-\infty$	$+\infty$	P.L.
$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?
P.L.	P.L.	P.L.	P.L.	?	?	?

Exemples.

1. -2 est une suite constante (donc qui converge vers -2 et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui diverge vers $+\infty$ donc $(-2\times n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
2. $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} -1\times n^2 = -\infty$.
3. $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n} = +\infty$.

Remarques.

1. En combinant ces résultats aux précédents, nous remarquons que les suites convergentes sont stables par combinaisons linéaires : si (u_n) et (v_n) sont convergentes alors $(\alpha u_n + v_n)$ est convergente. Ce qui signifie que les suites convergentes peuvent être vues comme des vecteurs.
2. Cette stabilité par combinaisons linéaires résultat nous autorise à passer à la limite dans des égalités (simples). Si (u_n) converge vers ℓ et si, par exemple, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ alors, en passant à la limite $\ell = 2\ell + 3$. C'est une astuce à retenir.

3 Inverse.

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes sont tous non nuls.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, à partir d'un certain rang, $u_n > 0$ alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, à partir d'un certain rang, $u_n < 0$ alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exemples.

1. Nous pouvons, sachant que $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, retrouver que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $\lim_{n\to+\infty} n^2 + n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+n} = 0$.
3. Puisque $n^3 + n + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n^3 + n + \frac{1}{n} > 0$: $\frac{1}{n^3+n+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4 Quotient.

Les résultats concernant les suites obtenues comme quotient de deux autres suites découlent des deux points précédents.

5 Exercices sur limites et opérations.

Exercice 9. ⚽

Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^2 + n + \dfrac{1}{n}$.

b) $u_n = \sqrt{n}\left(n^2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{4}{\sqrt{n} + n}$.

d) $u_n = n^3 + n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

e) $u_n = 5n^2 + 3n\sqrt{n}$.

f) $u_n = \sqrt{n}(2 - n - 2n^2)$.

g) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n - 1}$.

h) $u_n = n^2\left(\dfrac{2}{n+1} - 1\right)$.

i) $u_n = \dfrac{3}{n}\left(\dfrac{3}{n^3} - 5\right)$.

j) $u_n = \dfrac{3}{1-2n} - \dfrac{2}{1-3n}$.

k) $u_n = 2 - \dfrac{3}{6 + \sqrt{n}}$.

l) $u_n = 2 - n\sqrt{5n} + \dfrac{1}{n^2+1}$.

m) $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

n) $u_n = n(n-4)(1 - \sqrt{n})$.

Correction de l'exercice 9

a) $+\infty$.
b) $+\infty$.
c) 0.
d) $+\infty$.
e) $+\infty$.
f) $-\infty$.
g) 0.
h) $-\infty$.
i) 0.
j) 0.
k) 2.
l) $-\infty$.
m) $+\infty$.
n) $-\infty$.

Les règles sur les opérations se confrontent souvent à des situations de limite indéterminée.

Factoriser par la plus grande puissance de n apparaissant dans l'expression du terme général de la suite permet parfois de lever l'indétermination.

Exemples.

1. Si $u_n = n^3 - n$ alors *a priori* c'est une forme indéterminée. Factorisons par n^3 : $u_n = n^3\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Avec cette expression il n'y a plus de forme indéterminée : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $u_n = \frac{2n+1}{3n+7}$ correspond à une forme indéterminée, mais, en factorisant par n au numérateur et au dénominateur : $u_n = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{7}{n}}$.

   Or $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{7}{n} = 3$ donc (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.
3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination dans cette expression radicale on utilise les expressions conjuguées. $u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$.

Exercice 10. ⚽

Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^3 - n + 5$.

b) $u_n = n^4 - n^2 + 1$.

c) $u_n = 3n\sqrt{n} - 2n^3$.

d) $u_n = \dfrac{n-3}{n+1}$.

e) $u_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n+3}$.

f) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{3n^2 - 2n + 5}$.

g) $u_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 + 8}$.

h) $u_n = n\sqrt{n^2 + 3} - n^2$.

i) $u_n = n^2 - 3n$.

j) $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 2$.

k) $u_n = 3n^4 - 3n^3 - 2n + 1$.

l) $u_n = \dfrac{4n-1}{3n+1}$.

m) $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$.

n) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1}$.

o) $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$.

p) $u_n = \sqrt{5n+4} - \sqrt{5n+2}$.

q) $u_n = \sqrt{4n^2 + n + 3} - 2n$.

r) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}}$.

s) $u_n = n - \dfrac{n^2}{n+1}$.

t) $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1} - \dfrac{n+3}{3n-1}$.

u) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}$.

v) $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$.

w) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}$.

x) $u_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

Correction de l'exercice 10

a) $+\infty$.

b) $+\infty$.

c) $-\infty$.

d) 1.

e) $+\infty$.

f) $\frac{1}{3}$.

g) 0.

h) $+\infty$.

i) $+\infty$.

j) $+\infty$.

k) $+\infty$.

l) $\frac{4}{3}$.

m) 1.

n) $\frac{2}{3}$.

o) 0.

p) 0.

q) $\frac{1}{4}$.

r) $-\infty$.

s) 1.

t) $\frac{1}{6}$.

u) 1.

v) 1. Problème limite sous racine carré.

w) 0.

x) $-\frac{1}{2}$

6 Limites et fractions rationnelles.

Proposition 6 - Limite et fraction rationnelle.

Soient :
. $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,
. $P(X) = a_p X^p + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients réels,
. $Q(X) = b_q X^q + \cdots + b_1 X + b_0$ des polynômes à coefficients réels.
. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\left(\frac{P(n)}{Q(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a_p}{b_q} n^{p-q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\right)$$

Démonstration

En factorisant au numérateur et au dénominateur par n élevé à la puissance le degré du polynôme.

■

Exemples.

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^4+3n^2+6}{5n^2+n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7}{5}n^2 = +\infty$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{97n^6+7n^4+n}{13n^6+4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{97}{13}n^0 = \frac{97}{13}$.
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{17n^2}{5n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{17}{5}n^{-1} = 0$.

Remarques.

1. On pourrait s'inquiéter du fait que Q s'annule pour une valeur de $n \in \mathbb{N}$. Cependant Q n'admet qu'un nombre fini de racine et quitte à modifier le rang initial r on peut toujours supposer que $Q(n)$ ne s'annule pas pour $n \geqslant r$.
2. La limite dépend uniquement des monômes de plus haut degré de P et de Q.

VI Limite de la suite des images : $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Les résultats ici évoqués utilisent les limites de suites que nous n'avons pas encore vus.

Proposition 7 - Limite de la suite des images.

Soient :

. f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,

. $a \in \mathbb{R}$,

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}_f$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\left(f(x) \underset{x\to x}{\longrightarrow} a\right) \Rightarrow \left(f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)\right)$$

Remarques.

1. En particulier si f est continue en a alors la proposition s'applique.
2. Ce résultat se généralise à des suites dont tous les termes à partir d'un certain appartiennent à l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f puisque la convergence est une propriété asymptotique.

VII Limites et comparaison.

1 Limites finies.

Proposition 8 - Théorème d'encadrement.

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles,

. $\ell \in \mathbb{R}$.

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases}$$

alors

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Démonstration

Soient a et b deux réels tels que $a < \ell < b$.
Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $u_n \in]a, b[$.
De même il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $w_n \in]a, b[$.
Donc à partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, $u_n \in]a, b[$ et $v_n \in]a, b[$.
Puisque $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, forcément $v_n \in]a, b[$.

Ainsi quel qu soit l'intervalle ouvert $]a, b[$ contenant ℓ, à partir d'un certain rang, cet intervalle contient tous les termes de la suite (v_n).

(v_n) converge vers ℓ.

■

Exemples.

1.

Remarques.

1. C'est une propriété asymptotique : elle reste valable si l'encadrement n'est vérifié qu'à partir d'un certain rang.

Exercice 11. ⚽

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \frac{\sqrt{n+1}}{n + (-1)^n}.$$

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ on a :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$

2. Déterminez les limites des suites de termes généraux :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \text{ et } \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$

3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12. ⚽

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$;

c) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n+1}}$;

d) $u_n = \dfrac{n + 2(-1)^n}{n - (-1)^n}$;

e) $u_n = \dfrac{n^2 + \sin(n)}{n^2 + \cos(n)}$;

f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{1 + 2\sqrt{2n - (-1)^n}}$.

Correction de l'exercice 12

a) $-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) $-\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c) $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

d) En factorisant par n et en utilisant le a) : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

e) En factorisant par n^2 : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

f) En factorisant par $\sqrt{n}$ et en utilisant le théorème des gendarmes pour la limite du dénominateur pour ne pas utiliser de passage à la limite dans la fonction.

Exercice 13. ☢

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

Montrez que (u_n) converge et précisez sa limite.

Correction de l'exercice 13

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}.$$

Proposition 9 - Passage à la limite dans des inégalités.

Soient :

. $a, b \in \mathbb{R}$,

. $\ell \in \mathbb{R}$,

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers ℓ.

(i)
$$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant b) \Rightarrow (\ell \leqslant b)$$

(ii)
$$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a) \Rightarrow (\ell \geqslant a)$$

(iii)
$$(\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant u_n \leqslant b) \Rightarrow (a \leqslant \ell \leqslant b)$$

Démonstration ☣

1. Supposons pour alléger la rédaction que pour tout entier n on ait $u_n \leqslant b$.
   Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\ell \leqslant b$.

   Supposons que : $\ell > b$.
   Il existe alors des nombres réels α et β tels que $b < \alpha < \ell < \beta$.

Puisque (u_n) converge vers ℓ il existe un rang N tel que :

$$\forall n \geqslant N,\ u_n \in]\alpha, \beta[.$$

Donc en particulier :

$$\forall n \geqslant N,\ b < u_n.$$

Ce qui contredit notre hypothèse.

On a démontré en raisonnant par l'absurde que, nécessairement $\ell \leqslant b$.

2. Idem.
3. Se déduit clairement des deux points précédents.

■

Remarques.

1. Ce résultat signifie que l'on peut passer à la limite dans une inégalité large.
2. Ce n'est pas vrai avec des inégalités strictes en général : $\frac{1}{n} > 0$ et pourtant $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Il s'agit d'une propriété asymptotique, autrement dit on pourrait se contenter d'un majorant ou d'un minorant à partir d'un certain rang.
4. En particulier on retrouve que toute suite convergente est bornée.

2 Limites infinies.

Proposition 10

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

(i)

$$\left.\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \left(v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right)$$

(ii) Si, à partir d'un certain rang,

$$u_n \leqslant v_n$$

et si

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Démonstration

(i) Nous devons démontrer que (v_n) tend vers $+\infty$ avec deux hypothèses : (u_n) tend vers $+\infty$ et $u_n \leqslant v_n$ pour tout n. Nous allons établir que (v_n) vérifient la définition d'une suite divergeant vers $+\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrons que, à partir d'un certain rang, tous les termes de (v_n) appartiennent à l'ouvert $]A;+\infty[$.

Nous allons procéder en deux temps : trouver le rang N à partir duquel ça fonctionnera puis montrer qu'effectivement à partir de ce rang tous les termes de (v_n) sont dans l'intervalle. Le N nous sera donné par (u_n).
Puisque (u_n) tend vers $+\infty$, il existe un rang N pour lequel :

$$\forall n \geqslant N,\ A < u_n.$$

Or, par hypothèse :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n,$$

donc, par transitivité

$$\forall n \geqslant N,\ A < v_n.$$

Autrement dit : $v_n \in]A;+\infty[$.

$$\boxed{(v_n) \text{ tend vers } +\infty.}$$

(ii) ☣Il suffit de considérer les suites $(-u_n)$ et $(-v_n)$.

■

Exercice 14. ⚽

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n + (-1)^n$;

b) $u_n = n^2 - \sin(n)$;

c) $u_n = \sin\left(\sqrt{2 - \cos^3(1 + n^2 - n^n)}\right) - n$.

Correction de l'exercice 14

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $n - 1 \leqslant u_n$ or $n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $n^2 - 1 \leqslant u_n$ or $n^2 - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n \leqslant 1 - n$ or $-n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.}$$

Exercice 15. ☕

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

- (v_n) est bornée,
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démontrez que $(u_n + v_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 16. ✷—

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.

Correction de l'exercice 16

1. $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ donc strictement croissante.
2. (a) Par récurrence.
   Remarquons que dans ce cas nous aurions du mal à définir une fonction f telle que $u_{n+1} = u_n$.
   Clairement : $n^2 + 2n + 3 > n^2$.
   (b) $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_n > n^2$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. $u_n = (n+1)^2$.

VIII Théorème de la limite monotone.

1 Propriété de la borne supérieure.

2 Limite finie.

Proposition 11 - Théorème de la limite monotone.

(i) Toute suite réelle croissante et majorée est convergente vers sa borne supérieure.

(ii) Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente vers sa borne inférieure.

Démonstration

(i) L'ensemble de tous les termes de la suite, $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure que nous noterons ℓ.

Démontrons que (u_n) converge vers ℓ.

Soient a et b des réels tels que $a < \ell < b$.
Puisque ℓ est la borne supérieure de de l'ensemble des termes de la suite, il existe un entier N pour lequel $u_N \in]a, \ell]$.
Comme la suite et majorée par ℓ et croissante nous en déduisons que :

$$\forall n \geqslant N,\ u_n\ ]a, \ell].$$

Enfin, puisque $]a, \ell] \subset]a, b[$, nous pouvons conclure :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell.}$$

(ii) Idem.

■

Remarques.

1. Contrairement au théorème d'encadrement, celui-ci ne permet pas de connaître la limite mais uniquement son existence en tant que borne inférieure.
2. L'utilisation de ce résultat se prolonge en général par une recherche d'encadrement de la limite par divers procédés notamment algorithmiques.
3. En général la limite n'est pas le majorant ou le minorant.

Exemples.

1. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par -1 donc elle est convergente. Nous savons même qu'elle converge vers 0.
2.

Exercice 17. ☯

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

1. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 4.
3. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. En passant à la limite dans la formule de récurrence, démontrez que la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que 4.
5. Concluez.

Correction de l'exercice 17

1. La fonction affine $f : x \mapsto \frac{1'2}{x} + 2$ est strictement croissante puisque son coefficient directeur est strictement positif.

   La démonstration se fait par récurrence. $u_0 > u_1 = 6$. Si $u_n \geqslant u_{n+1}$ alors $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}$.
2. Par récurrence. $u_0 \geqslant 4$. Si $u_n \geqslant 4$ alors $f(u_n) \geqslant f(4)$.
3. Décroissante et minorée donc convergente.
4. $\ell = \frac{1}{2}\ell + 2 \iff \ell = 4$.
5. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$.

Exercice 18.

Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que (u_n) est majorée par 3.
3. Déduisez-en que (u_n) converge.

Correction de l'exercice 18

1. Par récurrence $f : x \mapsto \sqrt{6 + x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. $f(3) = 3$. Par récurrence.
3. Décroissante et minorée donc convergente.

Exercice 19.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Prouvez que (u_n) est croissante et majorée puis concluez.
Pour établir la majoration on établira, pour tout entier $k > 1$:

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Correction de l'exercice 19

La croissance est triviale.
On remarque un télescopage sur les sommes majorant : $u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 20.

Montrez que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ converge.

Correction de l'exercice 20

* La suite est croissante : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$.
* (v_n) est majorée par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \leqslant 1$.

Exercice 21. ☢ Nombre d'Apéry

On pose pour tout entier supérieur ou égale à 1 :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Justifiez que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

3. Qu'en conclure ?

Correction de l'exercice 21

1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3}$.
2.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{(n+1)^3} \\ &\leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \end{aligned}$$

Or on a successivement :

$$\begin{aligned} n(n+1) &\leqslant (n+1)^3 \\ -\frac{1}{n(n+1)} &\leqslant -\frac{1}{(n+1)^3} \\ -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} &\leqslant -\frac{1}{(n+1)^3} \end{aligned}$$

donc

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \leqslant -\frac{1}{n+1}$$

Finalement :

$$u_{n+1} \leqslant -\frac{1}{n+1}$$

3. La suite converge.

3 Limite infinie.

Proposition 12 - Théorème de la limite monotone.

(i) Toute suite réelle croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.

(ii) Toute suite réelle décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration

(i) ☕
Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrons que, à partir d'un certain rang, tous les termes de (u_n) sont dans $]A, +\infty[$.

Puisque (u_n) n'est pas majorée par A il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_N > A$.
Et comme (u_n) est croissante :

$$\forall n \geqslant N, \ u_n > A.$$

Autrement dit à partir de ce rang N tous les termes de la suite sont dans $]A, +\infty[$.

(u_n) tend vers $+\infty$.

(ii) Ce déduit de (i) en considérant $(-u_n)$.

■

Exercice 22. ☯
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Prouvez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u_{2^{m+1}} - u_{2^m} \geqslant \frac{1}{2}$.
3. Déduisez-en que (u_n) n'est pas majorée. Concluez.

Correction de l'exercice 22

1. Somme de termes positifs.

2.

$$\begin{aligned} u_{2^{m+1}} - u_{2^m} &= \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \\ &\geqslant \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} \\ &\geqslant \frac{2^{m+1} - 2^m}{2^{m+1}} \\ &\geqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. $u_{2^m} = (u_{2^m} - u_{2^{m-1}}) + \cdots + (u_{2^2} - u_{2^1}) + (u_{2^1} - u_{2^0}) + u_{2^0} \geqslant \frac{m}{2}$.

4 Suites adjacentes.

Proposition 13 - Suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

Si

(i) (u_n) est croissante,

(ii) (v_n) est décroissante et

(iii) $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

alors les suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* et dans ce cas elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

Démonstration

$w_n = v_n - u_n$ est décroissante car $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$. Comme la limite (w_n) est 0 on en déduit que $u_n \leqslant v_n$.

Donc : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$ donc (u_n) est croissante et majorée par u_0 donc converge vers un réel ℓ. De même (v_n) converge vers une réel ℓ'. Comme $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\ell - \ell' = 0$.

■

Exemples.

1. $u_n = 2 - \frac{3}{n^2}$ et $v_n = 2 + \frac{3}{n^2}$.

2. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$ sont adjacentes.
3. Pour tout entier $n \geqslant 2$ on note

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) \text{ et } v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n).$$

$(u_n)_{n \geqslant 2}$ et $(v_n)_{n \geqslant 2}$ sont adjacentes et convergent vers un nombre appelé constante d'Euler et noté γ.

Exercice 23. ◕

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrez que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

et déduisez-en la convergence de (u_n).
2. Montrez que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et concluez.

Correction de l'exercice 23

1.
2. Démontrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ donc (u_n) est strictement croissante.
* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n - u_n = \frac{1}{n}$ donc $v_n - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ v_{n+1} - v_n &\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

En tenant compte de l'encadrement démontré à la question précédente :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &\leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante.

$(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Nous en déduisons que

$(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et a la même limite que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui est appelée la série de Riemann de paramètre 2 joue et jouera pour nous un rôle important. Nous ne l'avons pas encore démontré mais sa limite est $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 24.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Correction de l'exercice 24

Il s'agit d'une situation classique. Nous séparons la suite en deux suites extraites qui regroupées forment la suite toute entière. Il s'agit d'une astuce usuelle pour déterminer la limite d'une suite.

Démontrons que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+1} \\ &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \\ &= -\frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2+1} \\ &= -\frac{1}{2n+4} + \frac{1}{2n+3} \\ &= \frac{1}{(2n+4)(2n+3)} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est croissante.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+2}$$

Or $-\frac{1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $S_{2n+1} - S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Les deux suites obtenues en regardant les termes de rangs pairs et impairs sont donc convergentes et nous admettrons que nous pouvons en déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est la même que celle des suites extraites.

Exercice 25. ☢

Soient $x \in [0,1]$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ et } v_n(x) = u_n(x) + \frac{x^n}{n \times n!}.$$

1. Vérifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$,

$$v_{n+1} - v_n = -x^n \frac{(n^2+2n)(1-x)+1}{n(n+1)\times(n+1)!}.$$

2. Déduisez-en que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes. Que pouvez-vous en déduire ?
3. Montrez que la limite de $(u_n(1))$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 26.

Montrez que les suites (u_n) et (v_n) dont le terme général est donné ci-dessous sont adjacentes :

$$u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}.$$

Exercice 27. ☢

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \text{ et } v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n.$$

Montrez que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Démontrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

* Montrons que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
Chaque terme de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est formé d'un produit de nombre strictement positifs donc est strictement positif (et, nous en aurons besoin ensuite, il en est de même pour $(v_n)_{n\geqslant 1}$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}\\ &= 1+\frac{1}{(n+1)^2}\\ &\geqslant 1\end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

* Montrons que $(v_n)_{n\geqslant 1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement positive :

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)u_{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n}\\ &= \frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\times\frac{u_{n+1}}{u_n}\\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &= \frac{n}{n+1}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}\right]\\ &= \frac{n}{n+1}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^4}{1-\frac{1}{n+1}}\right]\\ &= \frac{n}{n+1}\times\frac{n+1}{n}\left[1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^4\right]\\ &= 1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^4\\ &\leqslant 1\end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

* La différence $v_n - u_n = \frac{1}{n}u_n$ ne permet pas de trouver la limite. Il faut donc procéder autrement ici, inhabituellement nous allons utiliser les limites de (u_n) et (v_n) pour conclure.

  Montrons que $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.
  Donc $u_n = \frac{v_n}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
  Puisque les suites convergent vers la même limite ℓ :

$$v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

IX Suites géométriques.

Proposition 14

Soit $q \in \mathbb{R}$.

(i) Si $q = 1$ alors (q^n) est la suite constante égale à 1.
(ii) Si $1 < q$ alors (q^n) diverge en ayant pour limite $+\infty$.
(iii) Si $-1 < q < 1$ alors (q^n) converge vers 0.
(iv) Si $q < -1$ alors (q^n) diverge sans limite ni valeur d'adhérence.
(v) Si $q = -1$ alors (q^n) diverge avec deux valeurs d'adhérence.

Démonstration

(i) Trivial.
(ii) On utilise l'inégalité de Bernoulli pour $x = q - 1 > 0$: $q^n = (1 + (q-1))^n \geqslant 1 + n(q-1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. D'où par comparaison des limites le résultat.
(iii) * Si $0 < q < 1$ alors d'après le (ii) : $q^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  * $-1 < q \leqslant 0$ alors $-|q|^n \leqslant q^n \leqslant 0$ et d'après le théorème des gendarmes et le cas précédent $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(iv) $q^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $q^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ donc diverge et intuitivement (tous les termes de la suite étant pris en compte) elle n'aura pas de valeur d'adhérence.

(v) La suite formée des termes de rangs pairs est constante égale à 1 et celle formée des termes de rangs impairs est constante égale à -1.

■

Exemples.

1. ♥ $\mathrm{e}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En effet $\mathrm{e} > 1$ puisque $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$.
   Rappelons que $u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x$ car $\ln(u_n(x)) = \frac{x\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{1+\frac{x}{n}}$ et $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to0]{} \ln'(1) = 1$.
2. Si $x \in]-1,1[$ la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\frac{1}{1-x}$.

Exercice 28. ⚽

On considère la suite $u(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}.$$

1. On pose pour tout entier naturel n,
$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}.$$
   Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique dont donnera le premier terme et la raison.
2. Exprimez alors v_n puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminez la limite de la suite (v_n) et enfin celle de la suite (u_n).

Correction de l'exercice 28

1. $u_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$ et $v_0 = -\frac{1}{3}$.
2. $v_n = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{5^n}$ et $u_n = \frac{1-\frac{1}{5^n}}{1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5^n}}$.
3. $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 29. ⚽

On note $v_0 = -\frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - 1 \\ w_n = 2v_n + 6 \end{cases}$$

1. Démontrez que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Déduisez-en les expressions de v_n et w_n en fonction de n entier naturel. Déduisez-en la limite de la suite (v_n).
3. Calculez

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

Déduisez-en la limite de la suite (S_n).

Correction de l'exercice 29

1. $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.
2. $w_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$. $v_n = \frac{1}{2}\left(3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 6\right)$.
3. ²

Exercice 30.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1.$$

1. (a) Démontrez que pour tout entier supérieur ou égale à 3, $u_n \geqslant 0$.
   (b) Montrez que, pour tout entier n supérieur ou égale à 4 :
   $$u_n \geqslant n - 2.$$
   (c) Déduisez-en la limite de la suite (u_n).
2. On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par :
   $$v_n = 4u_n - 8n + 24.$$
   (a) Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique strictement décroissante et dont on donnera le premier terme et la raison.
   (b) Démontrez que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = \frac{7}{2^n} + 2n - 6.$$
   (c) Vérifiez que, pour tout entier naturel n, $u_n = x_n + y_n$, où (x_n) est une géométrique et (y_n) une suite arithmétique, dont on précisera pour chacune, le premier terme ainsi que la raison.
   (d) Déduisez-en l'expression de
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$
   en fonction de n entier naturel.

Exercice 31.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Prouver que (u_n) est croissante et majorée. Concluez.

Pour la majoration vous démontrerez par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$.

Correction de l'exercice 31

Démontrons que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{k} \times \frac{1}{k-1} \times \cdots \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &\leqslant 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leqslant 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leqslant 3 \end{aligned}$$

$(u_n)_{n \geqslant 0}$ est majorée.

Montrons que (u_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$.

(u_n) est croissante.

Puisque (u_n) est croissante et majorée, d'après le théorème de limite monotone

(u_n) est convergente.

et sa limite est inférieure à 3.

Exercice 32.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Étudiez le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déduisez des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
4. (a) Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$.
   (b) Déduisez-en la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Retrouvez ce résultat en passant à la limite dans la formule de récurrence.

Correction de l'exercice 32

1. Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$: « $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   * Initialisation.
     Nous voulons vérifier que $\mathscr{P}(1)$ est vraie, autrement dit que $1 \leqslant u_1 \leqslant 2$. Or $u_1 = 1$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant 2$.
     Ainsi : $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   * Hérédité.
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et uniquement $\mathscr{P}(n)$, pas $\mathscr{P}(n+1)$ ni $\mathscr{P}(n-1)$.
     Démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit il faut établir que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
     D'après l'hypothèse de récurrence :
     $$1 \leqslant u_n \leqslant 2.$$
     Or $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ est une fonction affine strictement croissante puisque son coefficient directeur est strictement positif, donc :
     $$f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2).$$
     Autrement dit :
     $$\frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$
     Comme de plus $1 \leqslant \frac{3}{2}$ on a bien :
     $$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$
     $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   * Conclusion.
     Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2.}$$

2. Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   Nous allons démontrer que $\forall n \in \ltimes^*,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Par définition de la suite :
   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$
   Donc :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n.$$
   i.e.
   $$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1. \quad (1)$$
   4°
   D'après la question précédente, $u_n \leqslant 2$ et donc
   $$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\times u_n &\geqslant -\frac{1}{2}\times 2 \text{ car } -\frac{1}{2} < 0 \\ -\frac{1}{2}u_n &\geqslant -1 \\ 1 - \frac{1}{2}u_n &\geqslant 1 - 1 \\ -\frac{1}{2}u_n + 1 &\geqslant 0 \end{aligned}$$
   Donc par transitivité avec (1) :
   $$u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$
   Nous avons démontré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
   Autrement dit :

   $$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

   Avec une démonstration par récurrence nous aurions pu établir un meilleur résultat : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2 donc

   $$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

4. (a) Démontrons par récurrence que $\mathscr{R}(n)$: « $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

* Initialisation.
  Nous voulons vérifier que $\mathscr{R}(1)$ est vraie, autrement dit que $u_1 = -\frac{1}{2^{1-1}} + 2$.
  Il s'agit de vérifier une égalité : on calcul séparément chaque membre.
  D'une part $u_1 = 1$, d'après l'énoncé, et d'autre part, $-\frac{1}{2^{1-1}} + 2 = 1$ donc $\mathscr{R}(1)$ est vraie.
* Hérédité.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons que $\mathscr{R}(n)$ est vraie. Notre hypothèse de récurrence est donc : $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$.
  Démontrons que $\mathscr{R}(n+1)$ est vraie. Nous devons donc établir que $u_{n+1} = -\frac{1}{2^n} + 2$.
  Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
  $$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1. \quad (2)$$
  Or, d'après l'hypothèse de récurrence $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$ donc, en substituant dans (2) :
  $$u_{n+1} = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 2\right) + 1.$$
  Donc :
  $$\begin{aligned} u_{n+1} &= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}\times 2 + 1 \\ &= -\frac{1}{2\times 2^{n-1}} + 2 \\ &= -\frac{1}{2^n} + 2 \end{aligned}$$
  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
* Conclusion.
  Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2.}$$

(b) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique dont la raison est $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Finalement, en utilisant l'expression explicite de (u_n) trouvée à la question précédente :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.}$$

5. Notons ℓ la limite de (u_n).
   En passant à la limite dans la formule de récurrence définissant (u_n) on obtient :
$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 1.$$
   Cette équation, du premier degré, équivaut successivement à :
$$\begin{aligned} \ell - \frac{1}{2}\ell &= \frac{1}{2}\ell + 1 - \frac{1}{2}\ell \\ \frac{1}{2}\ell &= 1 \\ 2\times\frac{1}{2}\ell &= 2\times 1 \end{aligned}$$
   Finalement

   $$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 2.}$$

Exercice 33.

Soit (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :
$$u_n = \frac{n^2}{2^n}.$$
1. Étudiez la convergence de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$.
2. Déduisez-en l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$.
3. Montrez que pour tout $n \geqslant 5$: $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$.
4. Déduisez-en la limite de (u_n).

Correction de l'exercice 33

1. Même si l'énoncé sous-entend qu'il n'y a pas de problème d'existence on peut vérifier rapidement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2n^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

$f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$ admet une limite en 0 par valeurs supérieures et $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(1+0)^2$.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \tfrac{1}{2}.}$$

2. L'idée consiste ici à faire apparaître une comparaison locale au voisinage de la limite.
   Puisque $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$ et que $\frac{1}{2} \in \left]0, \frac{3}{4}\right[$ nous pouvons affirmer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $\left]0, \frac{3}{4}\right[$.
   Autrement dit :

$$\boxed{\forall n \geqslant N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}.}$$

3. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 5$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$ ».

* $u_5 = \frac{5^2}{2^5} = \frac{25}{32} \times \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{4}$.
  Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \geqslant 5$ un entier.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.

$$u_{n+1} = u_n \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

  Puisque $n \geqslant 5$, par décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant u_n \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}\right)^2 \\ &\leqslant u_n \frac{3}{5} \\ &\leqslant u_n \frac{3}{4} \end{aligned}$$

  Donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \frac{3}{4} \\ &\leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} \end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
* Nous avons démontré par récurrence que

$$\forall n \geqslant 5,\ u_n \leqslant \left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-5}.$$

4. Pour tout entier $n \geqslant 5$ nous avons, d'après ce qui précède :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}.$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement et puisque $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans cet exercice nous avons comparé la croissance (la façon de tendre vers $+infty$ de deux suites : l'une puissance et l'autre exponentielle. Généralisation ce résultat dans la proposition suivante.

X Croissances comparées de suites.

Théorème 1 Croissances comparées.

Soient :

. $a > 0$, $b > 0$ et $q > 0$ des réels.

(i)

$$\frac{(\ln(n))^b}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ii)

$$(q \in]1, +\infty[) \Rightarrow \left(\frac{n^a}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

(iii)

$$(q \in]0; 1[) \Rightarrow \left(n^a q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

(iv)

$$\frac{q^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(v)

$$\frac{n!}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Démonstration

1.

■

Exemples.

1. Nous avons déjà vu en exercice que $\frac{n^2}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $n^{-2}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. $\frac{3^n+n^2}{n!+1}$.

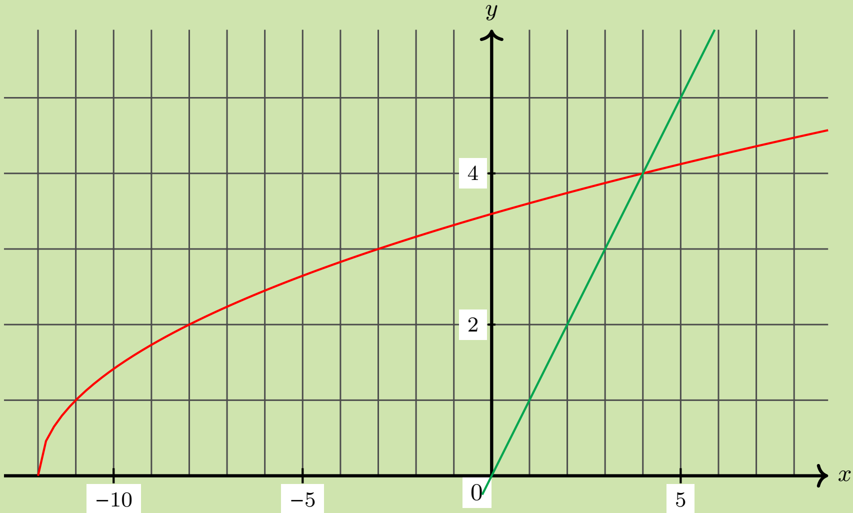
XI Exercices

Exercice 34. ⚽

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-12; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+12}$.



Construisez les premiers de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturez son comportement.

3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4).$$

(b) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}.$$

4. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

Exercice 35. ⚽

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1,4x - 0,05x^2.$$

   (a) Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.

   (b) Représentez graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec le centimètre comme unité graphique, ainsi que les 10 premiers termes de la suite (v_n).

   (c) Conjecturez son comportement.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8.$$

3. Déduisez-en que la suite (u_n) admet une limite finie.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$f(x) - 8 = -0,05(x-20)(x-8).$$

   (a) Pour tout entier naturel n :

$$8 - v_{n+1} \leqslant 0,9 \times (8 - v_n).$$

   (b) Déduisez-en que, pour tout entier naturel n :

$$8 - v_n \leqslant 6 \times 0,9^n.$$

   (c) Concluez.

Exercice 36.

Un démographe étudie l'évolution de la population d'un pays.
Depuis 1969 (cette année-là, ce pays comptait 44 500 000 habitants), il constate qu'en moyenne la population a un taux de natalité de 35 pour mille et un taux de mortalité de 17 pour mille.
À ces variations, il faut ajouter 25 000 nouveaux arrivant dans ce pays et retirer 9 000 citoyens qui partent définitivement.
On note p_n la population de $1969 + n$, exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminez p_0.
2. Démontrez que pour tout entier naturel n :
$$p_{n+1} = 1,018p_n + 16.$$
3. Déterminez le réel ℓ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$u_n = p_n - l$$
soit géométrique.
4. Déduisez-en les expressions de u_n et p_n en fonction de n entier naturel.
5. Combien d'habitants peut-on prévoir en 2012 ?

Exercice 37.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculez u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Écrivez un algorithme qui, pour une valeur $M \in \mathbb{R}$ donnée, renvoie un entier n pour lequel $u_n > M$.
   (b) Programmez cet algorithme à l'aide d'une calculatrice, puis exécutez-le pour des valeurs de M telles que 101, 100, 1 000.
   (c) Déduisez-en une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) à l'infini.
3. Démontrez que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 4$ alors :
$$u_n \geqslant 0.$$
Démontrez que, pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 5$ alors :
$$u_n \geqslant n - 3.$$
4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Exercice 38. ☕ Partie A.

On définit :

. la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5};$$

. la suite (S_n) pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}.$$

   Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

2. (a) Déterminez le sens de variation de la suite (S_n).
   (b) Calculez (S_n) en fonction de n.
   (c) Déterminez la limite de la suite (S_n).

Exercice 38. ☕ Partie B.

Étant donnée une suite (x_n), de nombres réels définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) défine par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Indiquez pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse ; justifiez dans chaque cas.
Proposition 1 : « si la suite (x_n) est convergente alors la suite (S_n) l'est aussi.
Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Correction de l'exercice 38

Partie A.

1.

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{5}\left(1+\frac{12}{5^n}\right)+\frac{4}{5} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{5}+\frac{12}{5^{n+1}}+\frac{4}{5} \\ &= 1+\frac{12}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$$

2. (a) (S_n) est strictement croissante car $S_{n+1}-S_n = 1+\frac{12}{5^{n+1}} > 0$

   (b) $S_n = n+1+12\times\frac{1-\frac{1}{5^{n+1}}}{1-\frac{1}{5}}$.

   (c) $$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Partie B.
Les deux propositions sont fausses comme le montre la parti A.

Exercice 39. épisode 1.

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

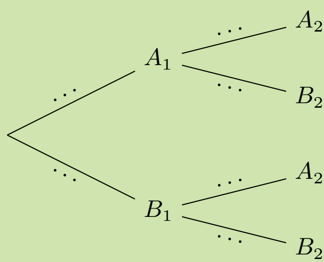
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

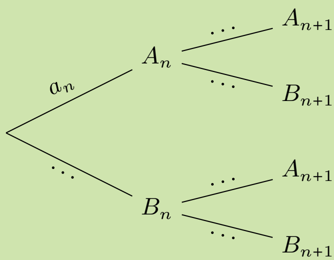
Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



Exercice 39. ☯ épisode 2.

2. (a) Calculer a_2.
   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 40.

Exercice 41.

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1, \ u_1 = \frac{1}{2} \\ \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

1. Calculez u_2 et déduisez-en que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   (a) Calculez v_0.
   (b) Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) Déduisez-en que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (d) Exprimez vhn en fonction de n entier naturel.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   (a) Calculez w_0.
   (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimez w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   (c) Déduisez-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
   (d) Exprimez w_n en fonction de n entier naturel.

4. Montrez que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n.$$

   Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 42.

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout entier n supérieur ou égal 1 :

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Étudiez la convergence de (w_n). Vous pourrez en donner une expression explicite.

Exercice 43. Partie A.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right) \end{cases}.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

1. Peut-on affirmer que pour tout entier n, $u_n \in [-1;1]$.
2. Montrez que si u_0 est un entier pair, alors la suite (u_n) est constante à partir du rang 1.
3. Montrez que si u_0 est impair, alors la suite (u_n) est à valeurs dans $\{-1;1\}$ à partir du rang 1.

Exercice 43. Partie B.

Dans cette partie on suppose que u_0 n'est pas entier.

4. Établissez le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1;1]$.
5. (a) Déduisez-en que, pour tout entier supérieur ou égal à 1, $u_n \in [-1;1]$.
   (b) Déduisez-en que la suite (u_n) est bornée.
   (c) Peut-on affirmer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, (u_n) est monotone ?
6. (a) Montrez que si $x \in]-1;0[\cup]0;1[$, alors :
   $$f(x) \in]-1;0[\cup]0;1[.$$
   (b) Déduisez-en, pour tout entier naturel n, que si u_0 n'est pas entier, alors u_n n'est pas entier.
7. (a) Justifiez que l'image par f de l'intervalle $]0;1[$ est l'intervalle $]-1;0[$, puis que l'image par f de l'intervalle $]-1;0[$ est l'intervalle $]0;1[$.
   (b) Déduisez-en que, quel que soit le rang, la suite (u_n) ne peut être monotone.

Exercice 44. Partie A.

Exercice 45.

Exercice 46.

Exercice 47. ☢

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Montrez que la suite $(u_n(x))$ converge et calculez sa limite.

Exercice 48. ☢

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Discutez de la convergence de $(u_n(x))$ selon la valeur de x.

Exercice 49. ☢

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor.$$

Déterminez la limite de $(u_n(x))$.

Exercice 50.