Généralités sur les suites et démonstration par récurrence.

I Généralités.

1 Définition et notations.

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Nous appellerons *suite numérique réelle* toute application

$$u : \{p,\ p+1,\ p+2,\ \ldots\} \to \mathbb{R}.$$

2 Représentations graphiques.

3 Monotonie.

Théorème 1

Soient :

. $p \in \mathbb{N}$,

. $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite numérique.

$(u_n)_{n \geqslant p}$ est strictement croissante si et seulement si

$$\text{quelque soit } n \geqslant p : \ u_{n+1} - u_n > 0.$$

Proposition 1 monotonie et formule explicite.

Soient :

. $p \in \mathbb{N}$,

. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement croissante sur $[p; +\infty[$ alors la suite $(f(n))_{n \geqslant p}$ est strictement croissante.

II Démonstration par récurrence.

1 Logique : propositions, assertions.

2 Le principe (ou théorème) du raisonnement par récurrence.

Théorème 2

Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.

Si les deux assertions suivantes sont vraies

(i) $\mathscr{P}(0)$ est vraie,

(ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors, forcément, $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie,

alors les assertions $\mathscr{P}(n)$ sont vraies pour tous les entiers naturels n.

3 Exercices.

III Récurrence double.

Théorème 3

Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.

$$\left.\begin{array}{c} \mathscr{P}(0) \text{ et } \mathscr{P}(1) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ [\mathscr{P}(n) \text{ et } \mathscr{P}(n+1)] \Rightarrow \mathscr{P}(n+2) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n).$$

IV Récurrence généralisée.

Théorème 4

Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.

$$\left.\begin{array}{c} \mathscr{P}(0) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ [\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathscr{P}(k)] \Rightarrow \mathscr{P}(n+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n).$$

V Un peu plus.