Généralités sur les suites et démonstration par récurrence.

I Généralités.

1 Définition et notations.

2 Représentations graphiques.

3 Monotonie.

II Démonstration par récurrence.

1 Logique : propositions, assertions.

2 Le principe (ou théorème) du raisonnement par récurrence.

3 Exercices.

Exercice 1. ☕

Montrez, pour tout entier naturel n, que :

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Exercice 2. ☢

Montrer que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel n.

1. $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.
2. $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.
3. $n^3 - n$ est divisible par 3.
4. $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.
5. $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Exercice 3. ☢

On considère la proposition suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \text{ « 9 divise } 10^n + 1 \text{ ».}$$

1. Démontrez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
2. Qu'en est-il de $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(3)$? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?
3. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: 9 divise $10^n - 1$.
4. Déduisez-en à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est fausse.

Exercice 4. ⚽

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right).$$

Exercice 5. ⚽

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et, pour $n \geqslant 2$: $u_n = 2u_{n-1} - n$.
Démontrez, pour tout entier naturel non nul n, que :

$$u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n.$$

Exercice 6. ⚽

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + n + 1$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}.$$

Exercice 7. ⚽

Exercice 8. ⚽

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } u_{n+1} = 5u_n - 1.$$

1. Calculez les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturez son expression explicite.
3. Démontrez la.

Exercice 9. ⚽
Démontrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 3$, on a :

$$n^2 > 2n + 1.$$

III Récurrence double.

Exercice 10. ☯
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Démontrez que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Exercice 11. ⚽
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.
Démontrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}.$$

Exercice 12. ⚽
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{4}(5u_{n+1} - u_n)$.
Démontrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{20}{3} \times \frac{1}{4^n} + \frac{17}{3}.$$

Exercice 13. ⚽

IV Récurrence généralisée.

Exercice 14.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2^n$.

V Un peu plus.

Exercice 15. ☕

1. Soient $r \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite arithmétique de raison r.
   (a) En supposant que u_0 est son premier terme, démontrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
   (b) Qu'est-ce que cela change si son premier terme est u_1 ? Démontrez-le.
   (c) Généralisez ce résultat avec comme premier terme u_p pour $p \in \mathbb{N}$.
   (d) Recommencez l'exercice pour les suites géométriques.

Exercice 16. ⚽

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = u_2 = 1 \text{ et } u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n.$$

Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n.$$

Exercice 17. ☢

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}b^i.$$

Aide. Pour l'hérédité on utilisera le fait que : $a^{n+1} - a^{n+1} = a \times a^n - b \times b^n$ et $a = (a-b) + b$.

Exercice 18. ☣

Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Montrez que, si la fonction f vérifie la propriété :

$$\mathscr{P} : \text{ « pour tout } x \in I, \ f(x) \in I \text{ »},$$

alors on peut définir sur $\mathbb{N}$ la suite numérique (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

De plus, la suite numérique (u_n) vérifie la propriété :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in I.$$

Exercice 19. ☣

Soient $f : I \to I$ une fonction une fonction croissante, $u_0 \in I$ et (u_n) la suite définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n).$$

Démontrez que, si $u_0 > u_1$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 20.

Exprimez en fonction de n les sommes données.

a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(4p-1)$.

b) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}(3p+5)$.

c) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

d) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1}3\times 5^{-n}$.

e) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}p(p+1)$.

f) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1}(p-2)^{2}$.

g) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}3^{2p+1}$.

h) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}3\times 2^{p}-1$.

Exercice 21.

Exprimez les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ, puis calculez-les.

a) $S = 5+8+11+14+\cdots+2\,012$.

b) $T = 2^{2}+2^{5}+2^{8}+\cdots+2^{20}$.

c) $R = 1+10^{-2}+10^{-4}+\cdots+10^{10}$.

d) $U = x+x^{2}+x^{3}+\cdots+x^{n}$, pour $x\in\mathbb{R}$.

e) $V = 1+x^{2}+x^{4}+x^{6}+\cdots+x^{2n}$, pour $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 22.

Montrez que

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0;n1\},\ 1+\frac{1}{2^{2}}+\cdots+\frac{1}{n^{2}} > \frac{3n}{2n+1}.$$

Exercice 23.