Variable aléatoire.

I Variables aléatoires discrètes réelles.

Définition 1

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega,\mathscr{E})$ un espace probabilisable.

Une *variable aléatoire sur $\mathcal{X}$* est une fonction $X : \Omega \to \mathcal{X}$ telle que $\{X = x\} := X^{-1}(\{x\})$ est un événement pour tout $x \in \mathcal{X}$.

Proposition 1

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega,\mathscr{E})$ un espace probabilisable,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

$\{\{X = x\} \mid x \in \mathcal{X}\}$ est un système complet d'événements.

Proposition 2

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega,\mathscr{E})$ un espace probabilisable,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire,
. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Les ensembles

$$\{X > a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}, \quad \{X \geqslant a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant a\},$$
$$\{X < a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < a\}, \quad \{X \leqslant a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\},$$

$$\begin{aligned}
\{a < X < b\} &= \{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) < b\},\\
\{a \leqslant X \leqslant b\} &= \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) \leqslant b\},\\
\{a \leqslant X < b\} &= \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) < b\},\\
\{a < X \leqslant b\} &= \{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) \leqslant b\}.
\end{aligned}$$

sont des événements.

II Variable aléatoire et probabilité.

1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Définition 2

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

On appelle *loi de probabilité de la variable aléatoire* X l'ensemble des couples $(x_i,\mathbb{P}(X = x_i))$ pour $i \in I$.

Proposition 3

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

Si $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ alors $\mathbb{P}\left(X \in \mathcal{X}'\right) = \sum_{x\in\mathcal{X}'} \mathbb{P}(X = x)$.

Corollaire 1

(i) Si I est fini alors $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.
(ii) Si I est infini alors $\sum_i \mathbb{P}(X = x_i)$ est une série convergente de somme 1.

2 Définir une variable aléatoire à partir d'une distribution.

Théorème 1

Soient :

. $(p_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs,

. $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de réels deux à deux distincts.

Si $\sum_i p_i$ converge et a pour somme 1 alors il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ et une variable aléatoire réelle discrète X sur $(\Omega,\mathscr{E})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ et

$$\forall i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$$

III Fonction de répartition.

Définition 3

Soient

. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

On appelle *fonction de répartition de X*, l'application

$$F_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array} \right. .$$

Proposition 4

Soient

. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

$$F_X(x) = \sum_{\substack{x_i\in\mathcal{X}\\ x_i\leqslant x}} \mathbb{P}(X = x_i).$$

Proposition 5

Soient
. $\mathcal{X} \subset \mathbb{N}$,
. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = x_n) = F_X(n) - F_X(n-1)$ et donc

$$F_X(n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k).$$

Proposition 6

$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Proposition 7

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

(i) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$,
(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$,
(iv) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ a < x}} F_X(x) = F_X(a)$.

Définition 4

Le *quantile d'ordre α de X*, appelé aussi α-quantile, est l'ensemble $Q_X(\alpha) = F_X^{-1}(\{\alpha\})$.

IV Variable aléatoire certaine.

Définition 5

Une variable aléatoire X est dite *certaine* s'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que

(i) $X(\Omega) = \{a\}$,

(ii) $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

V Loi uniforme.

1 Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

Définition 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que X suit une *loi uniforme sur* $[\![1,n]\!]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ si

(i) $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$,

(ii) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$.

2 Loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.

Définition 7

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$, on dit que X suit une *loi uniforme sur* $[\![a,b]\!]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ si

(i) $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$,

(ii) $\forall k \in [\![a,b]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$.

3 Loi uniforme sur $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

Définition 8

Soit $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on dit que X suit une *loi uniforme sur* $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1,x_2,\dots,x_n\})$ si

(i) $X(\Omega) = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$,

(ii) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n}$.

VI Loi de Bernoulli.

Définition 9

On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi de Bernoulli de paramètre* $p \in [0,1]$ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ si

(i) $X(\Omega) = \{0; 1\}$,

(ii) $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et (évidemment) $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Définition 10

Soient :

. Ω un ensemble,

. $A \subset \Omega$.

On appelle *fonction indicatrice de A* la fonction définie par

$$\mathbb{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \{0; 1\} \\ \omega & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Proposition 8

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $A \in \mathscr{E}$.

L'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de l'événement A suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

VII Transformée d'une variable aléatoire.

Proposition 9

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E})$ un espace probabilisable,

. X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega,\mathscr{E})$,

. g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

L'application $Y : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & g(X(\omega)) \end{array} \right.$ est une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega,\mathscr{E})$.

De plus la loi de probabilité de Y est donnée par :

(i) $Y(\Omega) = \{g(x) \mid x \in X(\Omega)\}$.

(ii) $\forall y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(Y = y) = \displaystyle\sum_{\{x \in X(\Omega) \ \mid \ f(x)=y\}} \mathbb{P}(X = x)$.

VIII Exercices.